

7.4 連鎖律 (続き)

以下の内容は昨年 of 解析学 A の試験の答案を見て、気づいた事ですが、皆さんにも役に立つと思いますので、配ることにします。

前期の試験問題 (2007 年のこと)

4. $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ の関係にあるとき、次の問いに答えよ。ただし、 $x > 0, y > 0, r > 0, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。

(2) $\frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial \theta}{\partial y}$ を r, θ の関数で表せ。

の答案を見て、何人かの人以下のような間違いをしていることに気づきましたので、指摘しておきます。

一変数関数 $y = f(x)$ が単調増加または単調減少で逆関数 $x = g(y)$ があるとき、 $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ 、すなわち $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ が成立することは高校で学びました。しかし、 $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{1}{\frac{\partial y}{\partial r}}$ や $\frac{\partial r}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = 1$ は成立しません! これが成立するとして計算していた人がいましたが間違いです。正しくは

$$\frac{\partial y}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} = 1 \quad \clubsuit$$

が成立します。

♣ の証明 x, y は (r, θ) の関数だから $x(r, \theta), y(r, \theta)$ と書くことにする。同様に r, θ も (x, y) の関数だから $r(x, y), \theta(x, y)$ と書く。互いに逆写像になっているものの合成を取るとともにもどるから $y = y(r(x, y), \theta(x, y))$ 。この式の両辺は x, y の関数である。両辺の y での偏微分を計算する。左辺の偏微分は 1。右辺の y に関する偏微分を合成関数の微分法 (連鎖律) を用いて計算すると

$$\frac{\partial y}{\partial r}(r(x, y), \theta(x, y)) \cdot \frac{\partial r}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial y}{\partial \theta}(r(x, y), \theta(x, y)) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y}(x, y) \quad (1)$$

(1) が 1 だから、これは ♣ を示している。■

$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ のように x, y, r, θ の具体形がわかっているわけだが、この具体形を用いて $\frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial y}{\partial \theta}, \frac{\partial \theta}{\partial y}$ を一つ一つ計算して掛けて和をとる必要は無い。

♣ と同様に次も示せる。

$$\frac{\partial y}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} = 1 \quad (3)$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

♣と(2),(3),(4)の式をまとめると

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \quad (5)$$

これは、互いに逆写像の写像のヤコビ行列の積は単位行列になることを示している(教科書152ページ定理4.12,先週のプリント参照).

以下の議論で、 y があたかも θ に依存しない関数であるかのように計算して結論としては正しい結果 $\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{r}$ を得ているが、もちろん y は θ の関数であり、以下の証明は誤りである.

間違った $\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{r}$ の証明:

$\frac{y}{\tan \theta} = x$ の両辺を θ で微分すると $y \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\tan \theta} \right) = \frac{\partial x}{\partial \theta}$. したがって、 $y \cdot \frac{-\frac{1}{\cos^2 \theta}}{\tan^2 \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta}$.
ゆえに

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = y \cdot -\frac{1}{\sin^2 \theta} = -\frac{r}{\sin \theta}.$$

したがって

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial \theta}} = \frac{1}{-\frac{r}{\sin \theta}} = -\frac{\sin \theta}{r}.$$

以上の証明は間違いを2回犯すと正しい結果になるということですが、もちろんこの答えは0点です.

以下が正しい証明です:

修正した証明: 関係式(5)を用いる.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

だから逆行列を計算して

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

したがって $\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{r}$.

講義で説明した証明:

$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ だから $\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$ を用いると

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x} \right) \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x} \right)^2} = -\frac{y}{x^2} \frac{x^2}{x^2 + y^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\sin \theta}{r}$$