7.5 極大・極小

これから，2 変数関数 $f(x,y)$ の極大・極小 (最大・最小) の判定について学ぶ．$\mathbb{R}$ 上で定義された 1 変数関数 $f(x)$ の極大・極小は次のように判定された：

(1) $f'(a)=0$, $f''(a)>0$ ならば f は $x=a$ で極小である．
すなわち a の近傍で $f(a)<f(x)$.

(2) $f'(a)=0$, $f''(a)<0$ ならば f は $x=a$ で極大である．
すなわち a の近傍で $f(a)>f(x)$.

(3) $f'(a)=f''(a)=0$ の時は，極大・極小いずれの場合もあり得る．判定には更に 3 次以上の微分を見る必要がある．

これと同様に 2 変数関数の極大・極小も 1 階，および 2 階偏微分を用いて判定できる．まず，極大・極小の定義を与えよう．

Definition 1 $f(x,y)$ を (x,y) 平面のある集合 A 上で定義された関数とする．
(1) f が $P=(a,b)\in A$ で極小であるとは
「ある $\varepsilon>0$ が存在して，$(x,y)\in B_\varepsilon(P)$ となる (x,y) について $f(x,y)>f(a,b)$.」
(2) f が $P=(a,b)\in A$ で極大であるとは
「ある $\varepsilon>0$ が存在して，$(x,y)\in B_\varepsilon(P)$ となる (x,y) について $f(x,y)<f(a,b)$.」

f が点 P で極大または極小の時，f は P で極値を取ると言う．
極値を取る点ではないが，次のような特徴的な性質を持つ点も重要である：
(3) $P=(a,b)$ が f の鞍点 (または峠点) であるとは，
「P を通る二つの線分 l_1, l_2 があり，
(i) l_1 上に f を制限すると f は P で極小
(ii) l_2 上に f を制限すると f は P で極大」

Example 2 $f_1(x,y)=x^2+y^2$, $f_2(x,y)=-x^2-y^2$, $f_3(x,y)=x^2-y^2$ を考えると

(1) f_1 は $(x,y)=(0,0)$ で極小.

(2) f_2 は $(x,y)=(0,0)$ で極大.

(3) $(0,0)$ は f_3 の鞍点．実際 x 軸上では $(0,0)$ は極小，y 軸上では $(0,0)$ は極大になっている．

1 変数の場合と同様，関数が微分可能ならば関数が極値を取るための必要条件として微分が 0 にならなければならない．

Theorem 3 (x,y) 平面の開集合 D で定義された関数 f が偏微分可能とする．$P=(a,b)\in D$ で極値を取る時,

$$f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$$

上記のように $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ となる (a,b) を f の臨界点 (または停留点，特異点) と言う．
極大・極小の判定には微分が 0 になる以外にさらに $f_{xx}(a,b), f_{xy}(a,b), f_{yy}(a,b)$ を見る必要がある．

7.6 テイラーの定理とその極値問題への応用

まず, 2 変数関数のテイラーの定理 (2 次までの近似のもの) を述べる．

Theorem 4 $f(x,y)$ を (x,y) 平面の開集合 D で定義された C^1 関数とする．$Q=(a,b)\in D, P=(a+h,b+k)\in D$ かつ P,Q を結ぶ線分 PQ が D に含まれるとする．このとき，$0<\theta<1$ が存在して

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+f_x(a+\theta h,b+\theta k)h+f_y(a+\theta h,b+\theta k)k.$$

Theorem 5 $f(x,y)$ を (x,y) 平面の開集合 D で定義された C^2 関数とする．$Q=(a,b)\in D, P=(a+h,b+k)\in D$ かつ P,Q を結ぶ線分 PQ が D に含まれるとする．
(1) $0<\theta<1$ が存在して

$$\begin{aligned} f(a+h,b+k) &= f(a,b)+f_x(a,b)h+f_y(a,b)k \\ &\quad +\frac{1}{2}\Big\{f_{xx}(a+\theta h,b+\theta k)h^2+2f_{xy}(a+\theta h,b+\theta k)hk+f_{yy}(a+\theta h,b+\theta k)k^2\Big\}. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} G(h,k) &= f(a+h,b+k) \\ &\quad -\Big\{f(a,b)+f_x(a,b)h+f_y(a,b)k+\frac{1}{2}\left(f_{xx}(a,b)h^2+2f_{xy}(a,b)hk+f_{yy}(a,b)k^2\right)\Big\}. \end{aligned}$$

と定義すると

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{G(h,k)}{h^2+k^2}=0.$$

これらの定理は $\varphi(t)=f(a+th,b+tk)$ とおいて一変数関数のテイラーの定理を適用すれば得られる．

Theorem 5 (1) と 2 次対称行列の正値性に関する結果を用いると極大・極小の判定条件を与えることができる．(ただし，(3) については少し詳細に議論する必要がある)．

Theorem 6 f は開集合 D 上の C^2 関数とする．$P=(a,b)\in D$ は f の臨界点であるとする．

$$H(a,b)=\begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{pmatrix}$$

とおく．
(1) $f_{xx}(a,b)>0, \det H(a,b)>0$ ならば f は (a,b) で極小.

(2) $f_{xx}(a,b)<0, \det H(a,b)>0$ ならば f は (a,b) で極大.

(3) $\det H(a,b)<0$ ならば (a,b) は f の鞍点.

対称行列 $A=\begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix}$ を考える．任意の $v=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\neq 0$ について ${}^t vAv>0$ となるとき，A を正定値行列と言う．これについて

Theorem 7 次は同値である．
(1) A は正定値行列.
(2) $p>0$ かつ $\det A>0$.