# 7 多変数関数の微分法

## 7.2 偏微分

**Definition 1 (偏微分)** (1)
• $f(x,y)$ を $Q=(a,b)$ の近く ($Q$ のある近傍) で定義された関数とする．$f(x,y)$ が $Q=(a,b)$ で $x$ に関して偏微分可能であるとは，極限値 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$ が存在するときに言う．この極限値を $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$, $f_x(a,b)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(Q)$ などと書き，$f(x,y)$ の $(a,b)$ での $x$ に関する偏微分係数と言う．
• $x,y$ を入れ換えて，$y$ での偏微分係数 $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ が定義できる．
• $f(x,y)$ が $(a,b)$ で $x,y$ 両方に関して偏微分可能のとき，$f(x,y)$ は $(a,b)$ で偏微分可能と言う．
(2) 開集合 $D$ で定義された関数 $f(x,y)$ が $D$ の各点で偏微分可能のとき $D$ で偏微分可能という．関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ を偏導関数という．

関数が偏微分可能だとしても連続とは限らない．例えば，$\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y)$ を $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$ $(x,y)\neq(0,0)$, $f(x,y)=0$ $(x,y)=(0,0)$ と定義すると $f(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ の各点で偏微分可能だが，原点 $(0,0)$ で連続では無い．従って，偏微分可能性は一変数関数のときのような微分可能性に対応するものではない (一変数関数が微分可能ならば連続である!)．そこで一変数関数の微分可能性に相当する概念「全微分可能性」を導入する．

**Definition 2 (全微分可能性)** (1) $f(x,y)$ を $(a,b)$ の近くで定義された関数とする．$f(x,y)$ が $(x,y)=(a,b)$ で全微分可能 (Fréchet(フレシェ) 微分可能ともいう) であるとは，適当な定数 $A,B$ が存在して

$$g(x,y)=\frac{|f(x,y)-f(a,b)-\{A(x-a)+B(y-b)\}}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}\qquad (x,y)\neq(a,b)$$

と定義するとき $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)=0$ のときにいう．
(2) 開集合 $D$ で定義された関数 $f(x,y)$ が $D$ の各点で全微分可能のとき，$f(x,y)$ は $D$ で全微分可能という．

上の定義の中で出てきた定数 $A,B$ は $f(x,y)$ の $(a,b)$ における偏微分係数と密接に関係している．実際，次が成立している．

**Theorem 3** $f(x,y)$ は $(a,b)$ で全微分可能とする．$A,B$ をその定義の中で出てきた数とする．次が成立する．
(1) $f(x,y)$ は $(a,b)$ で偏微分可能で

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=A,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=B.$$

(2) $f(x,y)$ は $(a,b)$ で連続である．

全微分可能性はそのままではチェックしにくいので，よりわかりやすい十分条件を導入する．

**Definition 4** (**$C^1$ 級, 1 回連続的微分可能性**) $D$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合とする．$f : D \to \mathbb{R}$ が $C^1$ 級の関数であるとは, 次の (1),(2) が成立するときに言う．$D$ 上の $C^1$ 級の関数全体の集合を $C^1(D)$ と書く．
(1) $f(x,y)$ は $D$ 上で偏微分可能である．すなわち偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ が存在する．
(2) 偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ は $D$ 上の連続関数である．

**Theorem 5** $f(x,y)$ が $D$ 上で $C^1$ 級ならば $f(x,y)$ は $D$ で全微分可能である．とくに $f(x,y)$ は $D$ で連続である．

**7.3 高階偏微分** $f(x,y)$ をある開集合 $D$ で定義された偏微分可能な関数とする．偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ が $(x,y)=(a,b)$ で偏微分可能のとき，4 つの偏微分

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a,b),\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a,b),\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b),\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b),$$

が存在する．これらをそれぞれ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(\text{または } f_{xx}(a,b)),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)(\text{または } f_{xy}(a,b)),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)(\text{または } f_{yx}(a,b)),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(\text{または } f_{yy}(a,b))$$

のように書く．

ところで $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$ が成立するだろうか．一般には成立しない．例えば $f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ $((x,y) \neq (0,0)$ のとき$)$, $f(x,y)=0$ $((x,y)=(0,0)$ のとき$)$ と定義される関数は $\mathbb{R}^2$ で $C^1$ 級かつ 2 回偏微分可能だが，$f_{xy}(0,0)=-1$, $f_{yx}(0,0)=1$ である．5 月の講義ノートで書いたように極限の順序の交換を行うと一般に極限は変わってしまうのである．しかし，順序交換が可能であるための次のような十分条件が知られている．

**Theorem 6** 次の (1), (2) を満たす開集合 $D$ 上の関数 $f(x,y)$ について $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$ が成り立つ．
(1) $f(x,y)$ は $D$ で偏微分可能である．
(2) $f_x(x,y), f_y(x,y)$ に関して偏導関数 $f_{xy}(x,y), f_{yx}(x,y)$ が存在し $f_{xy}(x,y), f_{yx}(x,y)$ は $(x,y)$ の連続関数である．

**Definition 7** $D$ 上の関数 $f(x,y)$ が $C^2$ 級であるとは次が成立するときに言う：
(1) $f(x,y)$ は $D$ で 2 回偏微分可能である．
(2) すべての 2 階の偏導関数 $f_{xx}(x,y), f_{xy}(x,y), f_{yx}(x,y), f_{yy}(x,y)$ は連続である．
　$D$ 上で $C^2$ 級の関数全体を $C^2(D)$ と書く．

**Corollary 8** $f \in C^2(D)$ のとき次が成立する．
(1) 関数 $f(x,y), f_x(x,y), f_y(x,y)$ は連続である．
(2) $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$.

　以上と同様に $C^n$ 級関数を定義できる．