7 多変数関数の微分法

7.1 平面上の連続関数

これから二つ以上の変数を持つ多変数関数の微分法を学ぶ．一般の n 変数関数について述べていくのは初学者にはわかりにくいので, $n=2$ の 2 変数関数について話をする．まず, よく使う記号を定義する．

1 記号

(1) $\mathbb{R}^n = \{(x_1,\ldots,x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ を n 次元ユークリッド空間という．$n=2$ のときの $\mathbb{R}^2$ は平面を表す．このときは，$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ のように x,y の変数を用いることの方が多い．

(2) $\mathbb{R}^2$ 上の 2 点 $P=(x,y), Q=(a,b)$ に対して P と Q との間の距離を $d(P,Q), \bar{PQ}$ と書く．すなわち

$$d(P,Q) = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

である．

(3)$B_\delta(Q) = \{P \in \mathbb{R} \mid d(P,Q) < \delta\}$ を Q の δ 近傍，または半径 δ の開円板と言う．

2 定義

Definition 1 (1) $P_n = (x_n, y_n)$, $Q=(a,b)$ とおく．$\lim_{n\to\infty} P_n = Q$ とは $\lim_{n\to\infty} d(P_n, Q) = 0$ のことと定義する．不等式

$$\max\{|x-a|, |y-b|\} \leq \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \leq |x-a|+|y-b|$$

に注意すればこれは $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ かつ $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ と同値である．

(2) $\displaystyle\lim_{P\to Q} f(P) = \alpha$ を次のように定義する：

(i) 「任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $\delta > 0$ が存在して $0 < d(P,Q) < \delta$ ならば $|f(P)-\alpha| < \varepsilon$」のときに言う．

これは

(ii) 「任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して $|x-a| < \delta, |y-b| < \delta$ かつ $(x,y) \neq (a,b)$ ならば $|f(x,y)-\alpha| < \varepsilon$」

と言い換えても同じである．ただし，(i) と (ii) の δ は一般には違う数である．というのは

$$d(P,Q) < \delta \Longleftrightarrow \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta$$

だから．

直観的には明らかだが次の命題が証明できる．(2) の $\lim_{n\to\infty} f(P_n) = \alpha$ は数列の極限である．(1) $\Longrightarrow$ (2) は定義から簡単に示すことができる．(2) $\Longrightarrow$ (1) は背理法を用いる．

Proposition 2 次の (1), (2) は同値である．

(1) $\lim_{P\to Q} f(P) = \alpha$.

(2) $P_n \to Q$ となるすべての点列 $\{P_n\}$ について (ただし $P_n \neq Q$) $\lim_{n\to\infty} f(P_n) = \alpha$.

極限の概念が定義できれば，自然に連続の定義もできる．

Definition 3 $f(x,y)$ を $A(\subset \mathbb{R}^2)$ 上で定義された関数とする．

(1) $f(x,y)$ が $Q=(a,b) \in A$ で連続であるとは，$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$ のときに言う．

(2) $f(x,y)$ が A の全ての点で連続なとき，$f(x,y)$ は A で連続な関数と言う．

さらに平面内の集合を記述する言葉を導入する．次に定義する開集合，閉集合の概念は 2 年生以上で学ぶ「距離空間」のところでより本格的に学びます (ユークリッド空間も距離 $d(P,Q)$ をもつ距離空間です).

Definition 4 (1)**(開集合)** $D \subset \mathbb{R}^2$ が開集合であるとは次が成立するときに言う:
「任意の $Q \in D$ に対してある $\delta > 0$ が存在して $B_\delta(Q) \subset D$」
(2) **(閉集合)** $F \subset \mathbb{R}^2$ が閉集合であるとは次が成立するときに言う:
「F 内の点列 $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\mathbb{R}^2$ 内のある点 Q に収束したとする．このとき $Q \in F$」

Example 5 $f_1(x,y) = 2x^2 + 3y^2, f_2(x,y) = xy, f_3(x,y) = 2x + 3y$ とおく．$D_i = \{(x,y) \mid f_i(x,y) < 1\}$ は開集合，$F_i = \{(x,y) \mid f_i(x,y) \leq 1\}$ は閉集合である．ただし，$i = 1,2,3$．より一般に $f(x,y)$ が連続関数ならば任意の実数 t に対して,

(i) $\{(x,y) \mid f(x,y) < t\}$ は開集合

(ii) $\{(x,y) \mid f(x,y) \leq t\}$ は閉集合

である．このことの証明は難しくはないが，開集合，閉集合，連続の定義をきちんと理解していないと証明できないでしょう．特に，$Q = (a,b)$ に対して

$$\left\{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P,Q) \leq \delta\right\} = \left\{(x,y) \mid \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \leq \delta\right\}$$

は閉集合である．これを閉円板と言う．

Definition 6 (1) **(連結性)** $A \subset \mathbb{R}^2$ が連結な集合とは次が成立するときに言う：
任意の $P,Q \in A$ が A 内の連続曲線で結べる．すなわちパラメータ表示された連続曲線 $(x(t),y(t))$ $(0 \leq t \leq 1)$ で $(x(0),y(0)) = P, (x(1),y(1)) = Q$ かつ $(x(t),y(t)) \in A$ $(0 \leq t \leq 1)$ となるものがある，ときに言う．
(2) **(領域)** 平面の集合 A が連結な開集合のとき，領域と言う．
(3) **(閉領域)** 閉領域はある領域にその境界を付け加えた集合を言う．
(4) **(有界性)** 集合 A が有界であるとは，平面内の十分大きな長方形 E を考えると $A \subset E$ となるときに言う．

注意 7 (1) $(x(t),y(t))$ が連続曲線とは $x(t), y(t)$ がともに t の連続関数であるときに言う．
(2) 閉領域の定義で「境界」という言葉を使った.「境界」の数学的な定義もあるがここでは，述べない．直観的に理解してほしい．上であげた Example の F_i は D_i にその境界を付け加えた閉領域である．

次の定理は基本的である．(2) は (1) を用いて証明される．(1) は 2. 実数の性質の Theorem 15 の平面バージョンの定理である．これは実数の連続性 (完備性) を用いて証明される．

Theorem 8 (1) (**Bolzano – Weierstrass の定理**) $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ が有界な点列のとき，適当な部分列 $\{P_{n(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ $(n(1) < n(2) < \ldots < n(i) < \ldots)$ を取ると $\lim_{i\to\infty} P_{n(i)}$ が収束するようにできる．
(2) $f(x,y)$ が有界な閉集合 A で連続な関数ならば $f(x,y)$ は A で最大値・最小値を取る．