6 一変数関数の微分法

6.3 Taylor の定理の証明

今日の講義で学ぶのは

(1) テイラーの定理を具体的な関数に適用すること

(2) テイラーの定理の証明のあらすじ

歴史的には、先週述べた形の定理がすぐに得られたわけではない。例えば、$\log(1+x)$ の無限級数展開はメルカトール図法で有名なメルカトールにより発見されていた (しかし実はすでにニュートンが発見済みであった)。他に $\arctan x, \arcsin x, (1+x)^{1/2}$ などの具体例が蓄積され、一般な定理 (ラグランジュによる) が発見されたのである。

Theorem 1 (Rolle の定理) $f(x)$ を $I=(\alpha,\beta)$ で微分可能、$[a,b]$ で連続な関数とする。$f(\alpha)=f(\beta)$ のとき、ある数 $c\in(\alpha,\beta)$ が存在して $f'(c)=0.$

このロルの定理を用いると次のコーシーの平均値の定理が示せる。

Theorem 2 (Cauchy) $F(x), G(x)$ を (α,β) で微分可能、$[\alpha,\beta]$ で連続な関数で $G'(x)\neq 0$ $(\alpha<x<\beta)$ とする。このとき、次の (1), (2) が成り立つ。
(1) $G(\beta)\neq G(\alpha).$
(2) $c\in(\alpha,\beta)$ が存在して

$$\frac{F(\beta)-F(\alpha)}{G(\beta)-G(\alpha)}=\frac{F'(c)}{G'(c)}.$$

ロルの定理を関数 $f(x)=\frac{F(\beta)-F(\alpha)}{G(\beta)-G(\alpha)}G(x)-F(x)$ に適用すればコーシーの平均値が証明される。コーシーの平均値の定理の特別な場合が高校でも学んだラグランジュの平均値の定理である。ラグランジュの平均値の定理はテイラーの定理の $n=1$ の場合にあたる。

Theorem 3 $F(x)$ を $I=(\alpha,\beta)$ で微分可能、$[\alpha,\beta]$ で連続とする。このとき $c\in(\alpha,\beta)$ が存在して

$$\frac{F(\beta)-F(\alpha)}{\beta-\alpha}=F'(c).$$

次にコーシーの定理を用いてテイラーの定理をどのように証明するか、$n=2$ の場合に説明する。先週のプリントでは下の b を x と書いていた。

Theorem 4 (テイラーの定理 $(n=2)$ の場合) $f(x)$ を $I=(\alpha,\beta)$ で定義された 2 回微分可能な関数とする。$a,b\in I$ とすると a,b の間の数 c が存在して

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{f''(c)}{2!}(b-a)^2. \tag{1}$$

Proof. $b < a$ の場合も同様に証明できるので、$b > a$ の場合に証明する。$F(x), G(x)$ $(a \le x \le b)$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) && (2) \\ G(x) &= (x-a)^2. && (3) \end{aligned}$$

$G'(x) \neq 0$ $(a < x < b)$ だからコーシーの定理により

$$\begin{aligned} \frac{f(b)-f(a)-f'(a)(b-a)}{(b-a)^2} &= \frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)} \\ &= \frac{F'(c_1)}{G'(c_1)} \quad (a < \exists c_1 < b) \\ &= \frac{f'(c_1)-f'(a)}{2(c_1-a)}. && (4) \end{aligned}$$

ここで $H(x), I(x)$ $(a \le x \le c_1)$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} H(x) &= f'(x) - f'(a) && (5) \\ I(x) &= 2(x-a). && (6) \end{aligned}$$

再びコーシーの定理を $H(x), I(x)$ についてコーシーの定理を区間 $[a, c_1]$ で適用し

$$\begin{aligned} \frac{f'(c_1)-f'(a)}{2(c_1-a)} &= \frac{H(c_1)-H(a)}{I(c_1)-I(a)} && (7) \\ &= \frac{H'(c_2)}{I'(c_2)} \qquad (a < \exists c_2 < c_1) && (8) \\ &= \frac{f''(c_2)}{2}. && (9) \end{aligned}$$

$a < c_2 < c_1 < b$ であることに注意せよ。(4), (9) より

$$\frac{f(b)-f(a)-f'(a)(b-a)}{(b-a)^2} = \frac{f''(c_2)}{2}.$$

これを書き直せば

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(c_2)}{2}(b-a)^2.$$

したがって $n = 2$ の場合が証明された。■

一般の n の場合は

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\ G(x) &= (x-a)^n \end{aligned}$$

に対して同様な議論をすればよい。