3. 数列の極限の定義

Definition 1 (1) α を実数とする．$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とは「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある自然数 N が存在して, $n \geq N$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成立する」と定義する．α を $\{a_n\}$ の極限という．もう少し、丁寧に書くとすると

「まず, 何か正の数 ε が与えられたとする．この ε に応じてうまく自然数 N を取ると N 以上のすべての自然数 n について

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成立する.」

これを数式で簡潔に

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ \ s.t.\ \ \forall n \geq N\ \ |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

のように書く.

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ とは「任意の $R \in \mathbb{R}$ に対して，ある自然数 N が存在して，$n \geq N$ ならば $a_n > R$.」のことと定義する．言い換えると,

「まず, 何か実数 R が与えられたとする．このとき，R に応じて，自然数 N を十分大きく取れば, N 以上のすべての自然数 n について $a_n > R$ が成立する.」

数式では

$$\forall R \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N}\ \ s.t.\ \ \forall n \geq N,\ a_n \geq R.$$

$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ は「任意の $R \in \mathbb{R}$ に対して，ある自然数 N が存在して, $n \geq N$ ならば $a_n < R$ が成立する」が定義である.

上記のように ε, N を用いて数列の極限の定義を論ずるのを ϵ-N 論法という．数列の極限，関数の極限の概念は 18 世紀にもあったが，ϵ-N 論法による厳密な定義は，19 世紀になって Cauchy(コーシー, コーシー・シュワルツの不等式のコーシー) により与えられた．この定義に従い，1. 数列の極限 (高校の復習) の Theorem 2, Theorem 3 を証明することができる．講義では，この中のいくつかを証明してみよう.

注意 2 (1) N は ε や R に応じて変わる数である．だからその依存性をはっきりと表すために $N(\varepsilon), N(R)$ と書くこともある．また N の取り方はもちろん一通りではない.

(2) 極限の定義の内容から ε は小さい数, $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ のときは R は大きい数，$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ のときは R は絶対値が大きい負の数を考えるのが普通であるが, ε としては大きい数, R として，絶対値が小さい数を考えても別に構わない．ただし, そのときは $N = 1$ で, すなわちすべての n で式 $|a_n - \alpha| \leq \varepsilon$ や $a_n > R$ が成立してしまうかも知れない.

(3) ε-N 論法のポイントは (1) の n が大きくなるとき限りなく a_n が α に近付くという動的な表現を ε と N のように二つの数を導入して表現していることにある.

実数はその完備性以外に次の性質を満たすことも証明できる.

Theorem 3 (アルキメデスの公理) 任意の正数 ε と a に対して自然数 N が存在して $N\varepsilon > a$ となる.

これを次のように言い換えても同じである.

Theorem 4 (アルキメデスの公理) 任意の実数 R に対してある自然数 N が存在して $N > R$ となる.

アルキメデスの公理を用いると次が証明できる．

問 1 $b \in \mathbb{R}$ とする．$\lim_{n\to\infty} \frac{a}{n} = 0$ を示せ．

注意 5 この講義では有理数の集合からある方法で実数全体の集合が構成されると述べただけで, その作り方には立ち入ってはいない．また，講義の中ではっきりとは言ってきていなかったがそうやって作られた実数について $a+b=b+a, a(b+c)=ab+ac, ab=ba, a(bc)=(ab)c$ 等の交換法則, 結合法則などが成立すること,

(i) $a \geq 0, b \geq c$ ならば $ab \geq ac$,

(ii) $a \geq b > 0$ ならば $\frac{1}{b} \geq \frac{1}{a} > 0$,

(iii) $a \geq b, c \geq d$ ならば $a+c \geq b+d$,

などの不等式の成立など我々がよく知っていることを証明することができることを注意しておく．この講義では，これらの成立を認めて認めて話を進めている．

二項定理 $(1+h)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k h^k$ から得られる不等式: $h>0$ ならば $(1+h)^n > 1+nh$ とアルキメデスの公理，先週のプリントの Theorem 2 を用いると次がわかる．

Proposition 6 (1) $a > 1$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$.
(2) $0 \leq a < 1$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a^n = 0$.

問 2 $a_n = \frac{n+1}{2n+1}$ とする．次の問いに答えよ．
(1) $\varepsilon > 0$ とする．$|a_n - \frac{1}{2}| \leq \varepsilon$ をみたす n の範囲を求めよ．
(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$ を示せ．
(3) $\varepsilon = \frac{1}{20}, \frac{1}{100}$ のとき「$n \geq N$ ならば $|a_n - \frac{1}{2}| < \varepsilon$」が成立するような最小の自然数 N を求めよ．

注意 7 $a_n = (-1)^n$ とする．極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在しないのはほぼ自明だが，定義に従って証明するとしたら，次のようになるだろう．
[解 1] α を実数とする．このとき，任意の N に対して $n \geq N$ を満たす n を適当に (ここで言う「適当に」は「いいかげん」という意味では無く,「ある状態や目的などにほどよくあてはまること」の意味です，辞書を見てください!) 取ると, $|a_n - \alpha| \geq 1$ となる．従って，$\varepsilon = 1$ として極限の定義をみたす α が存在しないので，$\lim_{n\to\infty} a_n$ は存在しない．
[解 2]
Theorem(実数の完備性) 数列 $\{a_n\}$ が収束するための必要十分条件は
• 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $n, m \geq N$ ならば $|a_n - a_m| < \varepsilon$ となることである．
という実数の性質を用いる．(ちなみに • を満たす数列を Cauchy(コーシー) 列と言う.)
あきらかにどんな $N \in \mathbb{N}$ に対しても奇数 n, 偶数 m で $n, m \geq N$ をみたすものを取ると $|a_n - a_m| = 2$ だから収束の必要条件を満たしていないということになる．

次の問題を解こうとしたら，ϵ-N 論法を用いざるを得ないのでは無いだろうか．

問 3 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} = \alpha$.