

1.1 リーマン積分の定義：Darbouxの上積分、下積分

Definition 1 (Darbouxの上積分・下積分) $a < b$ となる二つの実数 a, b を取り、有界閉区間 $I = [a, b]$ を考える。

(1) 数列 $\{a_i\}_{i=0}^n$ が

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b \quad (1)$$

を満たすとき、 I の分割と言う。分割は Δ で表すことにする。 n は自然数であり、とくに $a_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$ のときは、 I の n 等分の分割である。また、 I の分割 $\Delta = \{a_i\}_{i=0}^n$ に対して $|\Delta| = \max_{1 \leq i \leq n} (a_i - a_{i-1})$ と書くことにする。

(2) $f(x)$ を I 上の有界関数とする。すなわちある数 $M > 0$ が存在して $|f(x)| \leq M$ ($\forall x \in I$) とする。 I の分割 $\Delta = \{a_0, \dots, a_n\}$ に対して

$$S(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n \sup \{f(x) \mid x \in [a_{i-1}, a_i]\} (a_i - a_{i-1}) \quad (2)$$

$$s(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n \inf \{f(x) \mid x \in [a_{i-1}, a_i]\} (a_i - a_{i-1}). \quad (3)$$

$S(f, \Delta)$ は *Darboux (ダルブー)* の過剰和、 $s(f, \Delta)$ は *Darboux* の不足和と言う。

f の区間 I での上積分 $S(f)$, 下積分 $s(f)$ を

$$S(f) = \inf \{S(f, \Delta) \mid \Delta \text{ は } I \text{ のすべての分割を動く。}\} \quad (4)$$

$$s(f) = \sup \{s(f, \Delta) \mid \Delta \text{ は } I \text{ のすべての分割を動く。}\} \quad (5)$$

と定義する。 $S(f) = s(f)$ のとき、 $f(x)$ は I で積分可能と言う。この値を f の I での積分と言い、 $\int_{[a,b]} f(x) dx$ (または $\int_a^b f(x) dx$) と書く。

$S(f), s(f)$ はそれぞれ、ある数の集合の下限、上限で定義されている。したがって、それらの集合が下に有界、上に有界で無ければならない。これは、

$$\inf_{x \in I} f(x)(b-a) \leq S(f, \Delta), \quad s(f, \Delta) \leq \sup_{x \in I} f(x)(b-a)$$

から分かる。 $S(f, \Delta), s(f, \Delta)$ の基本的な性質をまとめる。その前に言葉を一つ用意する。

Definition 2 (1) $I = [a, b]$ の二つの分割 $\Delta = \{a_i\}_{i=0}^n, \Delta' = \{a'_i\}_{i=0}^m$ を考える。 Δ' が Δ の細分であるとは Δ の分割点 $\{a_i\}_{i=0}^n$ が Δ' の分割点 $\{a'_i\}_{i=0}^m$ にすべて含まれているときに言う。

(2) I の二つの分割 $\Delta_1 = \{\alpha_i\}_{i=0}^n, \Delta_2 = \{\beta_i\}_{i=0}^m$ に対して二つの分点を合わせた集合 $\{\alpha_i\}_{i=0}^n \cup \{\beta_i\}_{i=0}^m$ を分割点とする分割を $\Delta_1 \vee \Delta_2$ と書くことにする。 $\Delta_1 \vee \Delta_2$ は Δ_1, Δ_2 の細分である。

以下、特に断らない限り、 $f(x)$ は有界な関数とする。

Proposition 3 (1) 任意の分割 Δ に対して

$$\inf_{x \in I} f(x)(b-a) \leq s(f, \Delta) \leq S(f, \Delta) \leq \sup_{x \in I} f(x)(b-a).$$

(2) Δ' が Δ の細分とすると

$$s(f, \Delta) \leq s(f, \Delta'), \quad S(f, \Delta') \leq S(f, \Delta).$$

(3) 任意の分割 Δ_1, Δ_2 に対して、

$$s(f, \Delta_1) \leq S(f, \Delta_2).$$

(4) 任意の f に対して $s(f) \leq S(f)$.

例 $f(x) = x$ $I = [0, R]$ のとき、 $f(x)$ は積分可能で、 $\int_0^R x dx = \frac{R^2}{2}$. これは、次のように示される。まず

$$(i) |S(f, \Delta) - s(f, \Delta)| \leq R|\Delta| \quad (ii) \frac{S(f, \Delta) + s(f, \Delta)}{2} = \frac{R^2}{2}.$$

(i), (ii) と $s(f, \Delta) \leq S(f, \Delta)$ から

$$\frac{R^2}{2} - \frac{R|\Delta|}{2} \leq s(f, \Delta) \leq S(f, \Delta) \leq \frac{R^2}{2} + \frac{R|\Delta|}{2}. \quad (6)$$

$|\Delta| \rightarrow 0$ ならば (6) より

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} S(f, \Delta) = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} s(f, \Delta) = \frac{R^2}{2}.$$

実は Darboux により次が示されている。

Theorem 4 $\lim_{n \rightarrow \infty} |\Delta_n| = 0$ ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, \Delta_n) = S(f)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} s(f, \Delta_n) = s(f)$.

これから

Corollary 5 次の (1), (2) は同値である。

(1) $f(x)$ は I 上可積分である。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} |\Delta_n| = 0$ となる分割の列で $\lim_{n \rightarrow \infty} (S(f, \Delta_n) - s(f, \Delta_n)) = 0$ となるものが存在する。

この講義では Darboux による上積分、下積分を用いて積分を定義したが、これは次の定義とも同値になる。

Definition 6 $f(x)$ を $I = [a, b]$ 上の有界関数とする。 $\Delta = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ を I の分割とする。更に点列 $\{\xi_i\}_{i=0}^{n-1}$ を $a_{i-1} \leq \xi_{i-1} \leq a_i$ ($1 \leq i \leq n$) をみたすようにとる。

$$I(f, \{\xi_i\}, \Delta) = \sum_{i=1}^n f(\xi_{i-1})(a_i - a_{i-1}) \quad (7)$$

と書き、 $f(x)$ のリーマン和と呼ぶ。 $|\Delta| \rightarrow 0$ のとき、 $\{\xi_i\}$ の取り方によらず $I(f, \xi_i, \Delta)$ が一定の値に収束するとき $f(x)$ は I で可積分であるといい、極限値を $\int_a^b f(x) dx$ と書く。

Remark 7 (1)

$$s(f, \Delta) \leq I(f, \{\xi_i\}, \Delta) \leq S(f, \Delta)$$

が常に成り立つ。

(2) $f(x)$ が $[a, b]$ でリーマン積分可能なら

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) \frac{b-a}{n}.$$