1.3 微積分法の基本定理 (10/21)

今回の講義の内容は

1. 一様連続性の解説
2. 連続関数の可積分性の証明
3. 積分と微分が逆演算であることを示す微積分法の基本定理の解説

である。

まず、原始関数 (primitive function)、不定積分 (indefinite integral) の定義を与える。

Definition 1 $f(x)$ を区間 $[a,b]$ 上の関数とする。
(1) $[a,b]$ 上の微分可能な関数 $G(x)$ で $[a,b]$ 上で $G'(x)=f(x)$ となる $G(x)$ を $f(x)$ の原始関数という。
(2) $f(x)$ は $[a,b]$ で有界、可積分とする。$[a,b]$ の点 c をとり、

$$F_c(x)=\int_c^x f(t)dt \qquad x\in[a,b]$$

と定義した関数を $f(x)$ の不定積分という。

注 原始関数が存在しないような関数もある。また、積分可能関数 $f(x)$ の不定積分 $F_c(x)$ について $F_c'(x)=f(x)$ となると期待したいが、一般には成立しない。先週の関数 $f(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ を考える：

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{p} & x \text{ は } 0 \text{ でない有理数で } x=\frac{q}{p} \text{ のとき。ただし } p,q \text{ は互いに素な整数で } q>0 \text{ とする。}\\ 0 & x \text{ が無理数または } 0 \text{ のとき}\end{cases} \tag{1}$$

$c\in\mathbb{R}$ について $F_c(x)=0$ $(\forall x\in\mathbb{R})$ となり $F_c'(x)=0\neq f(x)$ である。さらに、$G'(x)=f(x)$ となる $G(x)$ は存在しないことも示すことができる。では、どのような積分可能な関数について、積分してから微分するともとの関数に戻るだろうか？

Theorem 2 (微積分法の基本定理) $f(x)$ を $[a,b]$ 上の連続関数とする。
(1) $f(x)$ の不定積分 $F_c(x)$ について $F_c'(x)=f(x)$. すなわち $F_c(x)$ は $f(x)$ の原始関数である。
(2) $G(x)$ を $f(x)$ の原始関数とすると $G(x)-F_c(x)$ は $[a,b]$ 上で定数である。
(3) $G(x)$ を $f(x)$ の原始関数とする。任意の α,β $(a\le\alpha\le\beta\le b)$ について

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=G(\beta)-G(\alpha).$$

(注) この定理を用いると (i) 積の微分法を用いて部分積分の公式, (ii) 合成関数の微分法を用いて置換積分法, を導けることがわかる。

Theorem 2 (1) の $F_c'(x)=f(x)$ は次の定理を用いて証明される。

Theorem 3 (積分の平均値の定理) $f(x)$ を $[a,b]$ 上の連続関数とする。任意の α,β $(a\le\alpha\le\beta\le b)$ に対して $\gamma\in(\alpha,\beta)$ が存在して

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=f(\gamma)(\beta-\alpha).$$

この定理の証明には前期で学んだ連続関数の中間値の定理と次の補題を用いる。

Lemma 4 $f(x)$ を $[\alpha,\beta]$ 上の連続関数ですべての x について $f(x)\ge 0$ とする。$\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$ ならば $f(x)=0$ $(\forall x)$.