広義積分 (1/27)

2.6 広義積分

平面上の積分に対して広義積分を定義する。代表的な積分をあげる。

$$(1)\quad J(\alpha,R)=\iint_{\{(x,y)\ |\ \sqrt{x^2+y^2}\le R\}}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}^{\alpha}}dxdy\qquad(\alpha>0)$$

$$(2)\quad K(\alpha,R)=\iint_{\{(x,y)\ |\ \sqrt{x^2+y^2}\ge R\}}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}^{\alpha}}dxdy\qquad(\alpha>0)$$

$$(3)\quad I=\iint_{\mathbb{R}^2}e^{-x^2-y^2}dxdy$$

(1) は関数 $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}^{\alpha}}$ が原点で定義されないから積分領域は $\{(x,y)\mid 0<\sqrt{x^2+y^2}\le R\}$ と書くべきだが、ルーズに (1) のように積分範囲を書くことが多い。

定義は以下のようになる。2 次元の場合に述べるが、3 次元以上でも同じように定義される。

Definition 1 A を (x,y) 平面の部分集合、$f(x,y)$ を A 上の関数とする。
(1) $f(x,y)$ が A 上で有界な関数ではないとき、または A が有界な集合でないときの $f(x,y)$ の A 上での積分を広義積分と言い、以下の (2) のように定義する。
(2) A の部分集合の列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ で次の性質を持つものがあるとする。

(i) A_n は面積確定有界集合で $f(x,y)$ は A_n で有界かつリーマン積分可能

(ii) $A_1\subset A_2\subset\cdots A_n\cdots$

(iii) $\cup_{n=1}^{\infty}A_n=A$

(iv) 有限な極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\iint_{A_n}|f(x,y)|dxdy$ が存在する

このとき、$f(x,y)$ は A 上で広義積分可能であると言う。また、このとき、有限な極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\iint_{A_n}f(x,y)dxdy$ が存在することが示せる。この極限値を $f(x,y)$ の A 上での広義積分と言い $\displaystyle\iint_{A}f(x,y)dxdy$ と書く。

(**注**)
(1) 上記の定義では、A を覆いつくす有界集合の増大列 $\{A_n\}$ を一つ取ったが、この定義は増大列の取りかたにはよらない。すなわち、$\{A_n\}$ について、(i),(ii),(iii),(iv) が成立していると、(i),(ii),(iii) をみたす任意の $\{A'_n\}$ について有限な極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\iint_{A'_n}|f(x,y)|dxdy$ が存在することが証明でき、かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\iint_{A'_n}f(x,y)dxdy$ の極限値も $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\iint_{A_n}f(x,y)dxdy$ と一致する。
(2) 教科書の広義積分の定義では、集合 A は領域、A_n は面積確定な有界領域でそれに境界を付け加えた閉領域 $\bar{A}_n$ が A に含まれるなどの条件をおいている。しかし、(1) で述べたように、上の定義のようにもう少し広く広義積分を定義しても問題は起こらない。ただし、注 (1) で述べたことにあたることの証明が教科書の定義だと簡単に示せる (教科書を見て下さい) が、上で書いた定義だと証明が簡単では無いのである。ただし、ルベーグ積分と呼ばれるさらに進んだ積分論を学べば証明は簡単ですが、それは牛刀割鶏です。

(3) 有界関数 $f(x,y)$ が面積確定集合 A 上でリーマン積分可能なら、$|f(x,y)|$ も A で積分可能であることが積分の定義からわかる。
(4) 一変数関数 $f(x)$ が $[a,+\infty)$ 上の関数のとき、広義積分を $\lim_{c\to\infty}\int_a^c f(x)dx$ と定義した。また、$\lim_{c\to\infty}\int_a^c |f(x)|dx$ が収束するときは $\lim_{c\to\infty}\int_a^c f(x)dx$ の極限も存在することが証明できると説明し、このとき広義積分は絶対収束すると言うと定義した。この定義によると、上記の定義は絶対収束する広義積分のみを考えていることになる。多次元の場合は絶対収束するもののみを考えるのが普通である。

Example 2 冒頭にあげた例では、極座標を用いた変数変換の公式を用いて

(i) $\alpha \geq 2$ のとき $J(\alpha,R)=+\infty$, $\alpha<2$ のとき、$J(\alpha,R)=\dfrac{2\pi}{2-\alpha}R^{2-\alpha}$

(ii) $\alpha \leq 2$ のとき、$K(\alpha,R)=+\infty$, $\alpha>2$ のとき $K(\alpha,R)=\dfrac{2\pi}{\alpha-2}R^{2-\alpha}$.

(iii) $I=\pi$

が示せる。いずれも基本的な結果である。特に (i),(ii) については、$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx, \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$ の収束・発散の境目が $\alpha=1$(実数の空間の次元) なのに対し、平面の次元 $\alpha=2$ であることに注意せよ。

同様に 3 次元空間上の積分 $\displaystyle\iiint_{\{(x,y,z)\ |\ x^2+y^2+z^2\leq R^2\}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^\alpha}dxdydz$ などの収束・発散も, 次元の 3, $\alpha=3$ が境目になる。この 3 次元空間上の積分では、教科書 153 ページ、205 ページにある極座標系の変数変換が重要である：

$$
\begin{aligned}
x &= r\sin\theta\cos\varphi \\
y &= r\sin\theta\sin\varphi \\
z &= r\cos\theta
\end{aligned}
$$

ただし $r\geq 0$, $0\leq\theta\leq\pi$, $0\leq\varphi\leq 2\pi$ の範囲を動く。このとき、

$$
\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = r^2\sin\theta \tag{1}
$$

となるため、

$$
\begin{aligned}
&\iiint_{\{(x,y,z)\ |\ R_0\leq\sqrt{x^2+y^2+z^2}\leq R_1\}} f(x,y,z)dxdydz \\
&\quad = \iiint_{\{(r,\theta,\varphi)\ |\ R_0\leq r\leq R_1, 0\leq\theta\leq\pi, 0\leq\varphi\leq 2\pi\}} f\left(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta\right) r^2\sin\theta drd\theta d\varphi
\end{aligned} \tag{2}
$$

などの積分の変換の公式が得られる。

上の例と次の広義積分の収束判定法を用いて多くの広義積分の収束が確かめられる。

Theorem 3 (広義積分の収束判定法) f を A 上の関数で Definition 1 の (2) の (i),(ii),(iii) をみたすとする。A 上の非負値関数 g で次の (1), (2) をみたすものがあるとする：
(1) すべての $(x,y)\in A$ について $|f(x,y)|\leq g(x,y)$
(2) 広義積分 $\displaystyle\iint_A g(x,y)dxdy$ が収束する。

このとき、広義積分 $\displaystyle\iint_A f(x,y)dxdy$ は収束する。

Corollary 4　$R > 0$ とする。
(1) f を $A_R = \{(x, y) \mid 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < R\}$ 上の連続関数とする。ある $\alpha < 2$ と $C > 0$ が存在して

$$|f(x, y)| \leq \frac{C}{\sqrt{x^2 + y^2}^{\alpha}} \quad \forall (x, y) \in A_R$$

をみたすとする。このとき f は A_R 上で広義積分可能。
(2) f を $D_R = \{(x, y) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \geq R\}$ 上の連続関数とする。ある $\beta > 2$ と $C > 0$ が存在して

$$|f(x, y)| \leq \frac{C}{\sqrt{x^2 + y^2}^{\beta}} \quad \forall (x, y) \in D_R$$

をみたすとする。このとき f は D_R 上で広義積分可能。

以下の例題では 3 次元空間における上記の Corollary の対応物が用いられる。

例題 5 電磁気学のクーロンの法則によると密度関数 $f(\mathbf{r})$ $(\mathbf{r} = (x, y, z))$ で荷電粒子が 3 次元空間に分布しているとき、無限遠の電位を 0 とすると点 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ の電位 $V(\mathbf{r})$ は積分

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(x', y', z')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} dx'dy'dz' \tag{3}$$

で与えられる。ε_0 は真空中の誘電率を表す。f が有界な連続関数でかつ $\gamma > 2$ が存在して

$$\lim_{\|\mathbf{r}\| \to \infty} \|\mathbf{r}\|^{\gamma} f(\mathbf{r}) = 0$$

を満たすときすべての $\mathbf{r}$ について $V(\mathbf{r})$ を定義している広義積分 (3) は収束することを示せ。ただし $\|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.