変数変換の公式 (1/13)

2.5 変数変換の公式

一変数関数の積分では、置換積分法は定積分を計算するのに重要な手法である。

Theorem 1 $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ を $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ となる C^1-級の全単射とする。$f(x)$ を $[a, b]$ 上のリーマン積分可能な関数とすると $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ $(\alpha \leq t \leq \beta)$ もリーマン積分可能で、

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

$\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ が全単射であるとは、

(i) (単射性, "一対一対応" ともいう) $t \neq s$ ならば $\varphi(t) \neq \varphi(s)$

(ii) (全射性, "上への写像" ともいう) $\{\varphi(t) \mid \alpha \leq t \leq \beta\} = [a, b]$

の二つが成立するときにいう。

この置換積分法の高次元版が変数変換の公式とよばれるものである。これまでと同様に 2 次元の場合に説明する。定理は二つに分けて述べることにする。その前に言葉を用意する。ヤコビ行列の概念は前期ですでに学んだものである。

Definition 2 D を (u, v) 平面の開集合とする。D から (x, y) 平面への写像 Φ についてその x, y 成分を $\Phi(u, v) = (\varphi(u, v), \phi(u, v))$ とする。すなわち

$$x = \varphi(u, v) \tag{1}$$
$$y = \phi(u, v) \tag{2}$$

という変数変換を考える。

(1) $\Phi(u, v)$ が連続写像であるとは $\varphi(u, v), \phi(u, v)$ が D で連続関数であるときにいう。

(2) $\Phi(u, v)$ が C^1 級の写像であるとは (単に C^1-写像ともいう) $\varphi(u, v), \phi(u, v)$ が D で C^1 級の関数であるときにいう。

(3) $\Phi(u, v)$ を C^1 級の写像とする。行列

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}$$

を $\Phi(u, v)$ のヤコビ行列 *(あるいは"微分"ともいう)* といい、$D\Phi(u, v)$ とかく。またその行列式の値 $\det D\Phi(u, v)$ を $\Phi(u, v)$ のヤコビ行列式 *(あるいは"ヤコビアン")* という。$\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ のように書くこともある。

Theorem 3 (変数変換の公式 (I)) Φ を (u, v) 平面の開集合 D から (x, y) 平面への C^1 級の写像とする。Φ は一対一写像でかつ $\det D\Phi(u, v) \neq 0$ $\forall (u, v) \in D$ とする。$A \subset D$ を面積確定な有界集合で A の境界も D に含まれるとするとき、$\Phi(A)$ は (x, y) 平面内の面積確定有界集合である。ただし、$\Phi(A) = \{\Phi(u, v) \mid (u, v) \in A\}$.
さらに $f(x, y)$ を $\Phi(A)$ 上のリーマン積分可能な関数とすると、$f(\Phi(u, v))|\det D\Phi(u, v)|$ は A 上のリーマン積分可能な関数で

$$\iint_{\Phi(A)} f(x, y)dxdy = \iint_A f(\Phi(u, v))|\det D\Phi(u, v)|dudv$$

上の定理で $f(\Phi(u,v))$ は $f\left(\varphi(u,v),\phi(u,v)\right)$ のことである。

ほとんど同じ形をしているが、もう一つ変数変換の公式を述べる。

Theorem 4 (変数変換の公式 (II)) D を (u,v) 平面内の開集合とする。A を D に含まれる面積確定な有界閉領域とする。Φ を D から (x,y) 平面への C^1 級の写像とし、次の (i), (ii) を仮定する。

(i) Φ を A の境界を除いた内部で制限すると一対一写像である。

(ii) $\Phi(A)$ は (x,y) 平面内の面積確定有界集合である。

このとき

(1) $f(x,y)$ を $\Phi(A)$ 上のリーマン積分可能な関数とすると $f(\Phi(u,v))|\det D\Phi(u,v)|$ も A 上のリーマン積分可能な関数で

$$\iint_{\Phi(A)} f(x,y)dxdy = \iint_A f(\Phi(u,v))|\det D\Phi(u,v)|dudv$$

(2) とくに $f(x,y)=1$ として

$$|\Phi(A)| = \iint_A f(\Phi(u,v))|\det D\Phi(u,v)|dudv.$$

具体例をあげる。

Example 5 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ の極座標変換を考える。(r,θ) が (u,v) にあたる変数である。(r,θ) が $D=\{(r,\theta)\mid r\in\mathbb{R},\theta\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}^2$ の範囲を動くとき、写像 $\Phi(r,\theta)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$ は明らかに C^1 級の写像である。それを $A=\{(r,\theta)\mid 0\le r\le R, 0\le\theta\le 2\pi\}$ に制限して考えると、$\Phi(A)=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le R^2\}$. Φ は A の境界を除いた集合で一対一であるから、Theorem 4 の仮定が満たされている。ヤコビ行列、ヤコビアンは

$$\begin{aligned} D\Phi(r,\theta) &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \\ \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} &= r \end{aligned}$$

となり $f(x,y)$ を $B_R=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le R^2\}$ 上の連続関数とすると

$$\iint_{B_R} f(x,y)dxdy = \iint_{\{(r,\theta)\ \mid\ 0\le r\le R, 0\le\theta\le 2\pi\}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta.$$

例えば $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}$ とおくと

$$\begin{aligned} \iint_{B_R} e^{-x^2-y^2}dxdy &= \int_0^R\int_0^{2\pi} e^{-r^2}rdrd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R e^{-r^2}rdr\right)d\theta \\ &= 2\pi\times\frac{1}{2}\left(1-e^{-R^2}\right) = \pi(1-e^{-R^2}) \end{aligned}$$

この結果を使うと $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$ を証明することができる。これは講義の中で解説する。

2.6 逆写像定理

Theorem 3 の変数変換の公式で $\det D\Phi(u,v)\neq 0$ という条件と写像 Φ が一対一という条件が出てきた。これについて次の定理が成立する。この逆写像定理にあまり時間を取ることはできないが、微積分の学習で一つの到達点になる重要な定理である。

Theorem 6 (逆写像定理) Φ を (u,v) 平面の開集合 D から (x,y) 平面への C^1 級の写像とする。さらに点 $P_0=(u_0,v_0)\in D$ において $\det D\Phi(P_0)\neq 0$ とする。このとき、
(1) ある $\varepsilon>0$ が存在して、P_0 の近傍 $B_\varepsilon(P_0)$ に Φ を制限すると Φ は一対一対応である。
(2) (1) の状況での逆写像 $\Phi^{-1}:\Phi\left(B_\varepsilon)(P_0)\right)\to B_\varepsilon(P_0)$ も C^1-写像である。

ヤコビ行列の性質から $\forall(u,v)\in B_\varepsilon(P_0)$ に対して、

$$\begin{aligned} D(\Phi^{-1})(\Phi(u,v))\cdot D\Phi(u,v) &= I \\ \det D(\Phi^{-1})(\Phi(u,v))\det D\Phi(u,v) &= 1 \end{aligned}$$

となることに注意。これは互いに逆写像のヤコビ行列の積は単位行列になるということで、前期に学んだ。
一変数のときの逆関数の微分法

$$\left(\varphi^{-1}\right)'(t)=\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))}$$

にあたる。