数学解析レポート問題 1 (〆切は 5 月 30 日の講義のとき)

1. (X, d) を距離空間とする。X の部分集合 A が開集合であるとは任意の $a \in A$ に対して、ある正数 ε が存在して $B_\varepsilon(a) \subset A$ となることを言う。ただし、$B_\varepsilon(a) = \{x \in X \mid d(a, x) < \varepsilon\}$ と定義されている。また、集合 A が閉集合であるとは、次の ● が成立するときに言う。

● $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset A$ が X のある元 x_∞ に収束するとき $x_\infty \in A$.

　このとき、X の部分集合 A に対する次の性質は同値であることを証明せよ。
(1) A は閉集合である。
(2) A^c は開集合である。

2. 　a, b を実数とし、$a < b$ をみたすとする。$X = \{x : [a, b] \to \mathbb{R} \mid x(t)$ は t の連続関数 $\}$ とおく。$\|x\| = \max_{a \le t \le b} |x(t)|$ とおく。
(1) 　$(X, \|\ \|)$ は Banach 空間であることを示せ。
(2) $x \in X$ とする。任意の $\varepsilon > 0$ に対して多項式 $p_\varepsilon(t)$ で $\|x - p_\varepsilon\| \le \varepsilon$ をみたすものが存在することが知られている (Weierstrass の多項式近似定理). このことを用いて $(X, \|\ \|)$ は可分であることを示せ.

3. 　$\mathbb{R}^n$ 上の l^p-ノルム $(p \ge 1)$ $\|x\|_p = \{\sum_{i=1}^n |x_i|^p\}^{1/p}$ はすべて同値であることを示せ。

4. $C_0(\mathbb{R})$ でコンパクトサポートを持つ $\mathbb{R}$ 上の連続関数の全体を表す。$\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x)$ がコンパクトサポートを持つとは, ある $R > 0$ が存在して $|x| \ge R$ ならば $f(x) = 0$ となることと定義する。X で定義される L^p-ノルム $(p \ge 1)$ は p が異なると同値では無いことを示せ。