Taylorの定理その2(6月5日)

今日学ぶのは
(1) テイラーの定理を具体的な関数に適用してみること。
(2) テイラーの定理の証明のあらすじ

歴史的には先週のプリントにあるような形で定理が最初から発見された分けではない。例えば、演習でやってもらった $\log(1+x)$ の無限級数展開 (これはメルカトール図法で有名なメルカトールが発表したが、ニュートンはすでに発見していた) や $\arctan x, \arcsin x, (1+x)^{1/2}$ などの個々の例が集積されて一般の定理が発見されたわけである。研究とは、色々な具体例の研究から、一般的な命題、仮説を推測し (ここで一つ思考の飛躍が必要)、その後、証明なり、実験などして確かめるものです。

§ 3.3 Taylor の定理の証明

Theorem 1 (Rolle の定理) $f(x)$ を (α, β) で微分可能、$[\alpha, \beta]$ で連続な関数とする。$f(\alpha) = f(\beta)$ ならばある数 $c \in (\alpha, \beta)$ が存在して $f'(c) = 0$.

このロルの定理を使うと次のコーシーの平均値の定理が示せる。

Theorem 2 (コーシー) $F(x), G(x)$ を (α, β) で微分可能、$[\alpha, \beta]$ で連続な関数で $G'(x) \neq 0$ $(\alpha < x < \beta)$ とする。このとき、次の (1), (2) が成立する。
(1) $G(\beta) \neq G(\alpha)$.
(2) $c \in (\alpha, \beta)$ が存在して

$$\frac{F(\beta) - F(\alpha)}{G(\beta) - G(\alpha)} = \frac{F'(c)}{G'(c)}.$$

ロルの定理を $f(x) = \dfrac{F(\beta) - F(\alpha)}{G(\beta) - G(\alpha)} G(x) - F(x)$ に対して適用すればコーシーの平均値の定理は証明される。このコーシーの平均値の定理の特別な場合が高校でも学んだ Lagrange の平均値の定理 (テイラーの定理の $n = 1$ の場合と同じ内容) である。

Theorem 3 (ラグランジュ) $F(x)$ を (α, β) で微分可能、$[\alpha, \beta]$ で連続とする。このとき、$c \in (\alpha, \beta)$ が存在して

$$\frac{F(\beta) - F(\alpha)}{\beta - \alpha} = F'(c).$$

ではコーシーの定理を使ってテイラーの定理がどのように証明されるか述べよう。簡単のため, $n = 2$ すなわち

Theorem 4 $f(x)$ を $I = (\alpha, \beta)$ で定義された C^1 級の関数で $f'(x)$ が I で微分可能とする。$a, b \in I$ とすると a と b の間の数 c が存在して、

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(c)}{2!}(b-a)^2. \tag{1}$$

を証明しよう (先週は b のところを x と書いていた)。

Proof. $b > a$ として証明する。$b < a$ でも同じ証明ができる。$F(x), G(x)$ $(a \le x \le b)$ を次のように定める。

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) - f(a) - f'(a)(x-a), & (2) \\ G(x) &= (x-a)^2. & (3) \end{aligned}$$

$G'(x) \neq 0$ $(a < x < b)$ だからコーシーの定理より

$$\begin{aligned} \frac{f(b) - f(a) - f'(a)(b-a)}{(b-a)^2} &= \frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} \\ &= \frac{F'(c_1)}{G'(c_1)} \qquad (a < \exists c_1 < b) \\ &= \frac{f'(c_1) - f'(a)}{2(c_1 - a)}. \qquad (4) \end{aligned}$$

ここで $H(x), I(x)$ $(a \le x \le c_1)$ を次のように定める。

$$\begin{aligned} H(x) &= f'(x) - f'(a), & (5) \\ I(x) &= 2(x-a). & (6) \end{aligned}$$

今度は $H(x), I(x)$ についてコーシーの定理を区間 $[a, c_1]$ で適用し

$$\begin{aligned} \frac{f'(c_1) - f'(a)}{2(c_1 - a)} &= \frac{H(c_1) - H(a)}{I(c_1) - I(a)} \\ &= \frac{H'(c_2)}{I'(c_2)} \qquad (a < \exists c_2 < c_1) \\ &= \frac{f''(c_2)}{2}. \qquad (7) \end{aligned}$$

$a < c_2 < c_1 < b$ に注意せよ。(4), (7) より

$$\frac{f(b) - f(a) - f'(a)(b-a)}{(b-a)^2} = \frac{f''(c_2)}{2}. \qquad (8)$$

これを書き直せば、

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(c_2)}{2}(b-a)^2. \qquad (9)$$

したがって $c = c_2$ として定理が証明された。一般の n の場合は

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, & (10) \\ G(x) &= (x-a)^n & (11) \end{aligned}$$

として、上と同じ操作を n 回繰り返せばよい。詳細は各自で考えてみよ。