数列の極限の定義について (5 月 8 日)

Definition 1 (1) α をある実数とする。$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とは「任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある自然数 N が存在して、$n \geq N$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$」と定義する。言い換えると「まず何か正の数 ε が与えられたとする。するとその ε に応じて、適当に大きい自然数 N をとると, N 以上のすべての n に対して、

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon \tag{1}$$

が成り立つ。」

このことを数式で簡単に

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \qquad \forall n \geq N \text{ に対して } \ |a_n - \alpha| < \varepsilon. \tag{2}$$

と書く。

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ とは「任意の $R > 0$ に対して、ある自然数 N が存在して、$n \geq N$ ならば $a_n > R$」と定義する。言い換えると「与えられた正数 R に対して、それに応じてうまく自然数 N を取ると $n \geq N$ をみたすすべての n に対して $a_n > R$ となる」。数式では

$$\forall R > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \qquad \forall n \geq N \text{ に対して } \ a_n > R. \tag{3}$$

と書く。$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ は「任意の $R > 0$ に対して、ある自然数 N が存在して、$n \geq N$ ならば $a_n < -R$」が定義である。

この極限の定義に従い、4 月 10 日のプリントの Theorem 2,3 (教科書の定理 1.4 とはさみうちの原理) を証明することができる。講義では時間があればこの中のいくつかを証明してみよう。

注

1. N は ε や R に応じていろいろ変わる数である。だからその依存性をはっきりと表すために $N(\varepsilon), N(R)$ と書くこともある。また N の取り方はもちろん一通りではない。
2. 極限の内容から ε は小さい数, R は大きい数を考えるのが自然だが ε が大きい数、R が小さい数でも別に構わない。ただし、ε が大きかったり、R が小さいと、すべての n で式 $|a_n - \alpha| < \varepsilon$, $a_n > R$ が成立してしまうかも知れない。
3. ε-N 論法 ($\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ の定義の論法は R-N 論法と呼んだ方が適当かも知れない) のポイントは (1) の n がどんどん大きくなるとき限りなく a_n が α に近付くという動的な表現を ε と N のように二つの数を導入して静的に表現していることにある。

実数はその完備性以外に次の性質も満たすことが証明できる。

Theorem 2 (アルキメデスの公理) 任意の正数 ε と正数 a に対してある自然数 N が存在して、$N\varepsilon > a$ となる。

これを用いると次が示せる。
問 1 $b \in \mathbb{R}$ とする。$\lim_{n\to\infty} \frac{b}{n} = 0$ を示せ。

注 この講義では有理数の集合からある方法で実数全体の集合が構成されると述べ、その作り方には立ち入ってはいない。また、講義の中ではっきりと述べなかったが、そうやって作られた実数が $a+b=b+a, a(b+c)=ab+ac, ab=ba, a(bc)=(ab)c$ 等の交換法則、結合法則などが成立すること、

1. $a \geq 0, b \geq c$ ならば $ab \geq ac$,
2. $a \geq b > 0$ ならば $\frac{1}{b} \geq \frac{1}{a} > 0$
3. $a \geq b, c \geq d$ ならば $a+c \geq b+d$

など我々がよく使っている不等式の性質も成立することを証明する必要があるのだが、これらのことも認めて話を進めることにする。

二項定理 $(1+h)^n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} {}_nC_i\ h^i$ から $h>0$ ならば $(1+h)^n > 1+nh$.
このことと問 1 の結果, 4 月 10 日のプリントの Theorem 2 を用いると次を示す事ができる。

Proposition 3 (1) $a>1$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$.
(2) $a<1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a^n = 0$.
(3) $a>0$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$.

Proposition 3 (3) は指数関数 $f(x)=a^x$ が連続関数であることを示すのに用いられる。

問 2 $a_n = \frac{n+1}{2n+1}$ のとき、$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$ となる. 次の問いに答えよ。

(1) ε を正数とする。$|a_n - \frac{1}{2}| < \varepsilon$ をみたす n を求めよ。

(2) $\varepsilon = \frac{1}{20}, \frac{1}{100}, \frac{1}{200}$ のとき「$n \geq N$ ならば $|a_n - \frac{1}{2}| < \varepsilon$」が成立するような最小の自然数 N を求めよ。

問 3 $a_n = (-1)^n$ とする。α を実数とする。このとき、ε をどのように取れば「すべての N について $n \geq N$ となる n で $|a_n - \alpha| \geq \varepsilon$ となるものがある」となるか? このような ε の存在が言えると言う事は $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ が収束しないということを意味する。

次の問題 5 は極限の定義が限りなく近付く流の定義と極限の基本性質 (4 月 10 日のプリントの Theorem 2,3) を用いた高校で学んだ来た方法では解けない問題としてよく引用される。

問 4 $\lim_{n\to\infty} a_n$ が収束するとする。このとき、集合 $\{a_n \mid n=1,2,\ldots,\}$ は有界である。

問 5 α を実数とする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ のとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} = \alpha$ を示せ。