Taylorの定理 (5月29日)

§ 3.2 Taylor の定理

Definition 1 関数 $f(x)$ を $I=(\alpha,\beta)$ で定義された関数とする。
(1) $f(x)$ が I で微分可能でその導関数 $f'(x)$ が I で連続の時、$f(x)$ は C^1 級の関数であるという。
(2) $n \geq 2$ とする。$f(x)$ が C^n 級の関数であるとは、$f'(x)$ が C^{n-1} 級の関数のときに言う。n 回微分して得られる導関数を $f^{(n)}(x)$ と書く。
　また、何回でも微分可能な関数を C^∞ 級の関数と言う。

(注) (1) 単に連続な関数を C^0 級の関数ということもある。初等関数 (多項式、指数関数、対数関数、三角関数等) はその定義域で C^∞ 級関数である。
(2) $[\alpha,\beta]$ で定義された関数 $f(x)$ が (α,β) で微分可能、$x=\alpha$ で右微分可能, $x=\beta$ で左微分可能で $\alpha<x<\beta$ のとき $f'(x)$, $x=\alpha$ では $f'_+(\alpha)$, $x=\beta$ で $f'_-(\beta)$ の値をとる関数が連続のとき $f(x)$ は $[\alpha,\beta]$ で C^1 級と言う.
　Taylor の定理とは次の定理を言う。

Theorem 2 $f(x)$ を $I=(\alpha,\beta)$ で定義された C^{n-1} 級の関数で $f^{(n-1)}(x)$ が I で微分可能とする。$a, x \in I$ とすると a と x の間の数 c が存在して、

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n. \tag{1}$$

$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$ は *Lagrange* の剰余項と呼ばれる。

(注) (1) c はある数 $0<\theta<1$ が存在して $c = a+\theta(x-a)$ と書けることに注意。
(2) $f(x)$ が C^n 級の時 (これは上の定理より強い仮定) は、$R_n(x) = \displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt$ のようにも書ける。
(3) $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ のとき、

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \tag{2}$$

右辺の級数を $x=a$ を中心とした Taylor 級数と言う ($a=0$ のときの Taylor 級数をとくに Maclaurin 級数と言う)。一般に $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ のような多項式の極限の形の無限級数を巾級数と言う。
(4) (2) の剰余項を用いると $|x|<1$ ならば次の Maclaurin 展開を得る。ただし $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + \cdots$$

がわかる。これは最初に Newton が 1665 年ごろ, 類推から発見した式で、最初の厳密な証明は Abel が 1826 年ごろ与えた。
(5) $f(x)$ を $x \neq 0$ ならば $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, $x=0$ では $f(x)=0$ となる関数と定義すると $f(x)$ は C^∞ 級の関数ですべての n について $f^{(n)}(0)=0$ である。したがって、このとき

$$f(x) \neq f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)(0)}}{k!}x^k. \tag{3}$$