初等関数の定義、微分法 (5 月 23 日)

§ 初等関数

多項式、あるいはそれの分数の形で書かれる関数、三角関数、指数関数、対数関数などの関数を初等関数と言う。

これらは、連続関数の代表的な例だが、これらの関数の連続性はどのようにチェックするのだろうか?

(1) 多項式、それらの分数の関数：

これらが連続であることは、4 月 18 日のプリントの Theorem 4 からわかる。

(2) 三角関数：

$\lim_{x \to 0} \sin x = 0$ は $\sin x$ の定義から x が十分小さい時、$|\sin x| \leq |x|$ ということからわかる。

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ だから $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$ がわかる。一般の x での $\sin x, \cos x$ の連続性は加法定理を用いて示される。$\tan x$ $(x \neq \frac{n\pi}{2})$ の連続性は $\sin x, \cos x$ の連続性、Theorem 4(4/18) による。

(3) 指数関数：

指数関数の定義は実数の連続性を用いて定義される。その定義に基づき、指数関数 ($f(x) = a^x$ $a > 0, x \in \mathbb{R}$) の連続性が示される。どのように定義するかは講義で述べる。ところで、0^0 は 0 でしょうか?それとも 1 でしょうか?

(4) 対数関数

対数関数は指数関数の逆関数として定義される。ここで次の定理に注意する。

Theorem 1 $y = f(x)$ $(a \leq x \leq b)$ を単調増加 (すなわち、$x < x'$ ならば $f(x) < f(x')$) または単調減少 ($x < x'$ならば $f(x) > f(x')$) な連続関数とする。このとき、逆関数 $x = g(y)$ は y の連続関数である。

この結果と指数関数が連続関数であることから、対数関数 $y = \log_a x$ $(a > 0, x > 0)$ が x の連続関数であることがわかる。

おおざっぱに言って上記のように連続性が示される。さらに、

Theorem 2 $y = f(x)$ $(a \leq x \leq b)$, $z = g(y)$ $(\alpha \leq z \leq \beta)$ は x, y の連続関数とする。さらに $f([a, b]) \subset [\alpha, \beta]$ とする。このとき、合成関数 $h(x) = g(f(x))$ $(a \leq x \leq b)$ はやはり x の連続関数になる。

なども使えば、上の初等関数の和、差、積、商、逆関数をとる操作、関数の合成を取る操作でたくさんの連続関数を作ることができる。

(注) 三角関数、例えば、$f(x) = \sin x$ $(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ は単調増加関数だから連続な逆関数が定義される。この関数は $y = \arcsin x$ $(-1 \leq x \leq 1)$ と書かれる関数である。これも大事な関数だが、高校までは出て来なかった関数である。この関数は微分法の解説のところで取り上げる。

§ 微分法

関数の微分は次のように定義される。

Definition 3 $y = f(x)$ を区間 $I = (a', b')$ で定義された関数とする。$f(x)$ が $x = a$ ($a' < a < b'$ とする) で微分可能とは極限

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

が存在するときに言う。極限を $f'(a)$ と書く。区間 I のすべての点で $f(x)$ が微分可能のとき、$y = f(x)$ は I で微分可能な関数と言う。

次のほとんど自明なことも定義に基づいて証明できる。この証明はそれほど難しくは無い。

Theorem 4 $y = f(x)$ が $x = a$ で微分可能ならば $x = a$ で連続である。

先ほどあげた初等関数は皆さんご存知のように、微分可能な関数である。

どのように導関数 (微分して得られる関数を導関数と言う) が得られるか、概略を述べる。その前に、微分に関しては、

1. 和の微分法
2. 積の微分法
3. 商の微分法
4. 合成関数の微分法
5. 逆関数の微分法

が基本的である。(講義では、この中の合成関数、逆関数の微分法の説明を主に行う。)

(1) 多項式

多項式の微分は $(x^n)' = nx^{n-1}$ を用いて得られる。$(x^n)' = nx^{n-1}$ は例えば、二項定理 $(x+h)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r h^r x^{n-r}$ を用いて計算できる。$f(x), g(x)$ を多項式として、$\frac{f(x)}{g(x)}$ の導関数は商の微分法を用いて計算できる。

(2) 三角関数

$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ が最も基本的だが、高校の教科書にのっている証明にはやや循環論法的なところがある。

(3) 指数関数

指数関数の微分法には $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ が用いられる。詳細は講義で述べる。$a \in \mathbb{R}$ のとき $f(x) = x^a$ $(x > 0)$ の微分は a が整数ならば、(1) の範囲で計算できると言えるが、そうでない時は、少し工夫を要する。

(4) 対数関数

対数関数の微分は、指数関数の微分が計算できるから、逆関数の微分法を用いても計算できるが、直接計算しても良い。

(注) 我々は三角関数の微分と逆関数の微分法を知っているので、三角関数の逆三角関数 (例えば、$\arcsin x$) の導関数も計算できる。例えば、$-1 < x < 1$ に対して、

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

と計算できる。これは再来週に話すことになると思う。