

## 4月10日 数列の極限、関数の極限、関数の連続性について (高校の復習)

**Definition 1** (1) 数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  に対して  $n$  が大きくなるとき  $a_n$  が実数  $\alpha$  に限りなく近くなるとき、 $\{a_n\}$  は  $\alpha$  に収束するといひ  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$  と書く。  $n$  が大きくなるとき  $a_n$  が限りなく大きくなるとき、 $\{a_n\}$  は  $+\infty$  に発散するといひ、  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  と書く。

(2) 関数  $y = f(x)$  に対して  $x$  が  $a$  に近づくと  $f(x)$  が限りなく  $A$  に近づくと  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  と書く。 関数  $y = f(x)$  に対して  $x$  が  $a$  に近づくと  $f(x)$  が限りなく大きくなるとき、  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  と書く。

(3) 関数  $y = f(x)$  について、定義域の点  $a$  で極限值  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  が存在し  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  となるとき、関数  $y = f(x)$  は  $x = a$  で連続であるといふ。 定義域の各点で連続な関数を連続関数といふ。

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \alpha, \infty$  の定義もあるが省略する。 上の定義は直感的でわかりやすく、初等的な段階では、これで十分だが深く学ぶには不十分である。 そのため、後で厳密な定義を学ぶ。 数列の極限・関数の極限に関しては次が基本的であり、高校の教科書にも載っている。 これらも直感的には明らかだが、きちんとした極限の定義に基づいて証明することができる。

**Theorem 2**  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$  とする。 このとき次が成立する。

(1) 任意の実数  $c$  に対して、  $\lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = c\alpha$ 。

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$ 。

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \alpha\beta$ 。

(4)  $\beta \neq 0$  のとき  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$ 。

**Theorem 3** (はさみうちの原理) 数列  $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$  が  $a_n \leq b_n \leq c_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) および  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha$  をみたすならば  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$ 。

**Theorem 4**  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$  とする。 このとき次が成立する。

(1) 任意の実数  $c$  に対して、  $\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = cA$ 。

(2)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = A + B$ 。

(3)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = AB$ 。

(4)  $B \neq 0$  のとき  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ 。

**Theorem 5** (はさみうちの原理) 関数  $f(x), g(x), h(x)$  に対して、  $a$  の近くで  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  をみたし、  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \alpha$  をみたすならば  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \alpha$ 。

**Theorem 6**  $f(x), g(x)$  は同じ集合で定義された連続関数とする。 このとき、それらの和、積、定数倍すなわち  $f(x) + g(x), f(x)g(x), cf(x)$  も同じ集合上で連続関数である。 また、  $g(x) \neq 0$  ならば  $\frac{f(x)}{g(x)}$  も連続関数である。

連続関数に対して、次の性質が成り立つ。 これらは今日説明する実数の性質を用いて証明できる。

**Theorem 7** (中間値の定理)  $y = f(x)$  は閉区間  $[a, b]$  上の連続関数とする。  $f(a)$  と  $f(b)$  の間の任意の値  $\alpha$  に対して、  $a$  と  $b$  の間の数  $c$  が存在して  $f(c) = \alpha$  となる。

**Theorem 8** (最大値・最小値の存在定理)  $y = f(x)$  は閉区間  $[a, b]$  上の連続関数とする。 このとき、関数  $f(x)$  には最大値、最小値が存在する。 ただし、  $M$  が最大値であるとは  $[a, b]$  のある点  $\alpha$  で  $f(\alpha) = M$  となり、すべての  $x \in [a, b]$  に対して  $f(x) \leq M$  となるときに言う。  $m$  が最小値であるとは  $[a, b]$  のある点  $\beta$  で  $f(\beta) = m$  となり、すべての  $x \in [a, b]$  に対して  $m \leq f(x)$  となるときに言う。