

## 累次積分 (12/18)

### 5. 平面上の積分

#### 5.2 可積分関数の例—補足—

この節ではどのような関数が可積分か述べてきたが、以下の定理が一番強い定理 (先週のプリントの Theorem 5, Theorem 7 がすべてこの定理を用いて証明できるという意味) である。

**Theorem 1** (1)  $f(x, y)$  を面積確定な有界集合  $A$  上の有界関数で不連続点の集合の面積が 0 とする。このとき、 $f(x, y)$  は  $A$  で可積分である。

(2)  $f(x, y)$  が面積確定有界集合  $A$  で可積分とする。有界関数  $g(x, y)$  が面積 0 の集合を除いて  $f(x, y)$  と一致しているならば、 $g(x, y)$  も  $A$  で可積分で、

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_A g(x, y) dx dy.$$

上の定理の (2) はすでに先週の Theorem 2(4) ですでに述べたものである。この結果は一変数関数  $f(x)$  がリーマン積分可能ならばどこか有限個の  $x$  における値を変えても積分可能性、積分値が変わらないことに対応している。

#### 5.3 累次積分

面積確定集合  $A$  上の連続関数  $f(x, y)$  は可積分であるとわかったが、それを具体的にどのように計算するか? が次の課題である。いちいちリーマン和の定義に立ち帰って計算するのは大変だし、具体的な値がわからないであろう。そのため、次の累次積分 (逐次積分とも言う) がよく使われる。

**Theorem 2** (累次積分)  $f(x, y)$  を  $E = [a, b] \times [c, d]$  上の連続関数とする。

(1) 任意の  $y \in [c, d]$  に対して、 $F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$  で定義される関数  $F(y)$  は  $[c, d]$  上の連続関数で

$$\int_c^d F(y) dy = \iint_A f(x, y) dx dy.$$

(2) 任意の  $x \in [a, b]$  に対して、 $G(x) = \int_c^d f(x, y) dy$  で定義される関数  $G(x)$  は  $[a, b]$  上の連続関数で

$$\int_a^b G(x) dx = \iint_A f(x, y) dx dy.$$

これは次のように一般化される。

**Theorem 3** (累次積分)  $c(x), d(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) を連続関数で、 $c(x) \leq d(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) とする。

$$A = \{(x, y) \mid c(x) \leq y \leq d(x), a \leq x \leq b\}$$

上の連続関数  $f(x, y)$  について、

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy \right) dx. \quad (1)$$

**Remark 4**  $f(x, y) \geq 0$  のときは、 $\iint_A f(x, y) dx dy$  の積分値は立体

$$V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in A\}$$

の体積を表す。ただし、立体  $V$  の体積の定義は、 $V$  を含む直方体  $E$  をとり、そこで  $V$  の定義関数  $1_V$  ( $V$  で 1,  $V^c$  で 0 となる関数) を 3 次元空間上の関数として積分したものの：

$$\iiint_E 1_V(x, y, z) dx dy dz$$

である。この値と Theorem 3 (1) の積分値 (1) が同じになるということは 3 次元空間上の関数の累次積分から示される。例えば、最初に  $z$  で積分しその後  $(x, y)$  について積分してみれば、 $\iint_A f(x, y) dx dy$  となる。

この定理は 12 月 4 日の計算機実習ですすでにお目にかかったものである。

上の累次積分の応用として、次の不等式が証明できる。この不等式は FKG 不等式と呼ばれる統計力学で重要な不等式の簡単な形のものである。なお、FKG は C.Fortuin, P.Kasteleyn, J.Ginibre の 3 人の頭文字である。

演習問題 (参考)  $f(x), g(x)$  を  $[0, 1]$  上の単調増加な連続関数とすると

$$\left( \int_0^1 f(x) dx \right) \left( \int_0^1 g(x) dx \right) \leq \int_0^1 f(x)g(x) dx$$

が成立することを示せ。

一般に連続関数  $f(x), g(x)$  について成立する Schwarz の不等式

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left\{ \int_a^b f(x)^2 dx \right\}^{1/2} \left\{ \int_a^b g(x)^2 dx \right\}^{1/2}$$

と混同しないように。

#### 5.4 補足 $\mathbb{R}^3$ 上の積分について

累次積分のところでは立体の体積に関連して 3 次元空間の積分について少しふれた。ここまで考えてきた  $\mathbb{R}$  や  $\mathbb{R}^2$  の部分集合上の積分と同様に、 $\mathbb{R}^n$  上の積分が定義できる。ここでは、 $\mathbb{R}^3$  での図形の体積、積分について簡単な補足事項をまとめる。

**Definition 5 (積分の定義)**  $E = \{(x, y, z) \mid x \in [a, b], y \in [c, d], z \in [e, f]\}$  とする。 $f(x, y, z)$  を  $E$  上の有界関数とする。 $f(x, y, z)$  の  $E$  上の積分  $\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz$  の定義を与える。 $E$  の分割

$$\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \quad c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d, \quad e = z_0 < z_1 < \dots < z_l = f,$$

に対し、

$$S(f, \Delta) = \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq l} \sup \{f(P) \mid P \in E_{ijk}\} |E_{i,j,k}|$$

$$s(f, \Delta) = \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq l} \inf \{f(P) \mid P \in E_{ijk}\} |E_{ijk}|.$$

ここで  $E_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$ ,  $|E_{ijk}| = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$ . さらに

$$S(f) = \inf \{S(f, \Delta) \mid \Delta \text{ はすべての分割を動く} \}$$

$$s(f) = \sup \{s(f, \Delta) \mid \Delta \text{ はすべての分割を動く} \}$$

$S(f) = s(f)$  のとき、 $f(x, y, z)$  は  $E$  で可積分といい、この値を  $\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz$  と書く。

1次元、2次元と同様 Darboux の定理が成り立つ：

**Theorem 6**  $\Delta$  に対して  $|\Delta| = \max\{x_i - x_{i-1}, y_j - y_{j-1}, z_k - z_{k-1} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq l\}$  とおく。  $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S(f, \Delta) = S(f)$ ,  $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} s(f, \Delta) = s(f)$  が成立する。

積分に基づいて体積の定義を与える。有界集合  $V \subset \mathbb{R}^3$  を考える。

$$1_V(x, y, z) = \begin{cases} 1 & (x, y, z) \in V \\ 0 & (x, y, z) \in V^c \end{cases} \quad (2)$$

と定義し、 $1_V$  を  $V$  の定義関数と言う。

**Definition 7** (有界集合の面積の定義)  $V \subset E$  となる直方体を取ると、 $1_V$  が  $E$  で可積分のとき、

$$|V| = \iiint_E 1_V(x, y, z) dx dy dz. \quad (3)$$

この定義で、ある  $E$  に対して  $1_V$  が可積分ならば他の  $V$  を含む長方形  $E'$  についても  $1_V$  は  $E'$  上可積分で

$$\iiint_E 1_V(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{E'} 1_V(x, y, z) dx dy dz$$

が成立する。したがって、 $V$  の体積  $|V|$  の定義は  $E$  の取り方にはよらない。

**Definition 8**  $f(x, y, z)$  を  $\mathbb{R}^3$  の有界集合  $V$  上の有界関数とする。

$$f^*(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & (x, y, z) \in V \\ 0 & (x, y, z) \in V^c \end{cases} \quad (4)$$

と定義する。 $V$  を含む直方体  $E$  を考え、 $f^*(x, y, z)$  が  $E$  上で積分可能の時、積分の値  $\iiint_E f^*(x, y, z) dx dy dz$  は  $E$  の取り方によらないことがわかる。このとき、 $f(x, y, z)$  は  $E$  上で可積分であるといい、

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_E f^*(x, y, z) dx dy dz.$$

と定義する。

**Theorem 9**  $\mathbb{R}^3$  内の滑らかな曲面で囲まれた図形の体積は確定する。

**Theorem 10**  $A$  を  $(x, y)$  平面内の面積確定な有界集合とする。 $\varphi(x, y), \phi(x, y)$  を  $A$  上の有界連続関数で  $\varphi(x, y) \leq \phi(x, y)$  ( $(x, y) \in A$ ) をみたすとする。このとき、集合

$$B = \{(x, y, z) \mid \varphi(x, y) \leq z \leq \phi(x, y), (x, y) \in A\}.$$

の体積は確定で、

$$|B| = \iint_A (\phi(x, y) - \varphi(x, y)) dx dy.$$

また、 $f(x, y, z)$  が  $B$  上の連続関数ならば  $f$  は  $B$  で積分可能で

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \iint_A \left\{ \int_{\varphi(x, y)}^{\phi(x, y)} f(x, y, z) dz \right\} dx dy.$$

**Remark 11** 以下の定理が成立することを注意しておく。教科書の定理 5.12 が対応する定理である。

**Theorem**  $A$  を  $\mathbb{R}^2$  の面積確定有界集合とする。 $f(x, y)$  を  $A$  上の有界連続関数とする。 $A$  の分割  $\Delta: A = \cup_{i=1}^n A_i$  を考える。ただし、各  $A_i$  はやはり面積確定集合で、 $A_i \cap A_j$  の面積は 0 とする。また、各小領域  $A_i$  から 1 点  $P_i (\in A_i)$  を選んでおく。ここで、 $|\Delta| = \max_{1 \leq i \leq n} \delta(A_i)$  と定める。ここで  $\delta(A_i)$  は  $A_i$  を含む円全体を考えてその直径の下限をあらわす。

$$I(f, \{P_i\}, \Delta) = \sum_{i=1}^n f(P_i) |A_i|$$

とおく。 $|A_i|$  は  $A_i$  の面積を表す。 $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} I(f, \{P_i\}, \Delta)$  は積分  $\iint_A f(x, y) dx dy$  の値に収束する。

$V$  が体積確定な立体でも同様なことが成立する。我々の立場からすればこれは定理である。しかし、上の極限を積分の定義とする立場もありえる。

実際、昔の理工系の学生なら微積分の講義で積分を学ぶよりも前に、電磁気学とか物理数学とかよばれる 1 年次の講義で上の形で積分にいきなり出くわすものであった。皆さんもそうでしょうか？ただし、厳密に理論を構築していくという立場に立つと、では、面積はどう定義されているのですか？という疑問もわき、 $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} I(f, \{P_i\}, \Delta)$  として定義するのはやはり無理がある。