平面上の積分 (11/27)

5. 平面上の積分

5.1 積分の定義

$E = \{(x,y) \mid x \in [a,b], y \in [c,d]\}$ とする。$f(x,y)$ を E 上の有界関数とする。$f(x,y)$ の E 上の積分 $\iint_E f(x,y)dxdy$ の定義、有界集合の面積の定義を与えた。今日は、一般な有界集合上の積分の定義を与える。

Definition 1 $f(x,y)$ を有界集合 A 上の有界関数とする。

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in A \\ 0 & (x,y) \in A^c \end{cases} \tag{1}$$

と定義する。A を含む長方形 E を考え、$f^*(x,y)$ が E 上で積分可能の時、積分の値 $\iint_E f^*(x,y)dxdy$ は E の取り方によらないことがわかる。このとき、$f(x,y)$ は A 上で可積分であるといい、

$$\iint_A f(x,y)dxdy = \iint_E f^*(x,y)dxdy.$$

と定義する。

次の性質は積分の基本性質である。(3) に関しては、どのような集合の面積が 0 かを述べないと意味が無い。それは、Theorem 6 (2) で述べるように C^1 級の曲線が代表的な例である。

Theorem 2 $f(x,y), g(x,y)$ が有界集合 A で積分可能とする。

(1) 任意の実数 a, b に対して、$af(x,y) + bg(x,y)$ も積分可能で、

$$\iint_A (af(x,y) + bg(x,y))\, dxdy = a \iint_A f(x,y)dxdy + b \iint_B g(x,y)dxdy.$$

(2) $f(x,y) \le g(x,y)$ ならば

$$\iint_A f(x,y)dxdy \le \iint_A g(x,y)dxdy.$$

(3) $f(x,y)$ が有界集合 $A,\ B$ で積分可能で $A \cap B$ の面積が 0 とする。このとき、$f(x,y)$ は $A \cup B$ で積分可能で

$$\iint_{A\cup B} f(x,y)dxdy = \iint_A f(x,y)dxdy + \iint_B f(x,y)dxdy.$$

(4) A の面積 0 の部分集合 C があって C の補集合上で $f(x,y) = g(x,y)$ が成立するならば

$$\iint_A f(x,y)dxdy = \iint_A g(x,y)dxdy.$$

5.2 可積分関数の例

どのような関数が可積分になるか、基本的な定理をあげる。

Theorem 3 $f(x,y)$ は $E = [a,b] \times [c,d]$ 上の連続関数とする。このとき、$f(x,y)$ は E 上で可積分である。

この定理は E 上の連続関数の一様連続性とダルブーの定理を用いて証明される。Theorem 3 は基本的な定理だが、これでは、どのような集合 A が面積確定かがわからない。というのは、A の面積は 1_A の積分として定義されるが、1_A という関数は連続関数ではないからである。そのため、Theorem 3 を少し拡張した次の定理をあげる。

そのため、言葉を用意する。

Definition 4 平面曲線 $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ $(a \leq t \leq b)$ が区分的に C^1-級とは分点 $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ があって、$\varphi(t)$ は各区間 $(a_i \leq t \leq a_{i+1})$ で C^1 級のときに言う。

Theorem 5 有界関数 $f(x, y)$ は長方形 E に含まれる有限個の区分的に C^1 級の曲線を除いた集合上で連続であるとする。このとき、$f(x, y)$ は E で積分可能である。

この定理を用いるとどのような集合が面積確定かわかる。

Theorem 6 (1) 有界集合 A が区分的に C^1 級の曲線で囲まれた集合であるとすると A は面積確定な集合である。
(2) 区分的に C^1 級の曲線の面積は 0 である。

この定理と先週述べた積分可能な関数のグラフで囲まれた図形の面積が確定であることを用いると面積が確定する集合が多数あることがわかる。
Theorem 3 は次のように拡張される。

Theorem 7 A を面積確定な有界集合とする。$f(x, y)$ が A で連続ならば $f(x, y)$ は A で可積分である。

最後に面積確定でない集合の例をあげておく。

$$A = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \text{かつ } x, y \text{ は有理数}\}.$$

このとき、$S(1_A) = 1, s(1_A) = 0$ で面積確定でない。