曲線の長さと平面上の積分 (11/20)

4.4 曲線の長さ

Definition 1 (曲線の定義) 平面曲線とは $\mathbb{R}$ の区間から平面への連続写像を言う。すなわち、t の連続写像 $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ $(a \leq t \leq b)$ を言う。さらに、

(i) $t \neq t'$ のとき、$\varphi(t) \neq \varphi(t')$ となるとき、単純曲線と言う。

(ii) 曲線 $\varphi(t)$ が $\varphi(a) = \varphi(b)$ かつ $t \neq t'$ でどちらかが a, b と異なるとき、$\varphi(t) \neq \varphi(t')$ となるとき、単純閉曲線と言う。

Remark 2 単純閉曲線の一番代表的な例は円 $\varphi(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ $(0 \leq t \leq 1)$. である。この例からもわかるように「単純閉曲線は曲線の内側と外側の二つの部分に平面を分ける」ということこと (*Jordan* の定理) が証明できる。しかし、その証明は易しくない。

Definition 3 平面曲線 $\varphi(t)$ $(a \leq t \leq b)$ の長さ $l(\varphi)$ を

$$l(\varphi) \quad = \quad \sup\left\{ l(\varphi, \Delta) \;\middle|\; \Delta = \{a = t_0 < \cdots < t_n = b\} \text{ は } [a,b] \text{ のすべての分割を動く} \right\} \tag{1}$$

と定義する。ただし、$[a,b]$ の分割 $\Delta = \{a = t_0 < \cdots < t_n = b\}$ に対して、

$$l(\varphi, \Delta) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} \overline{\varphi(t_i)\varphi(t_{i+1})} \tag{2}$$

とする。また、$\overline{\varphi(t_i)\varphi(t_{i+1})}$ は *2* 点 $\varphi(t_i), \varphi(t_{i+1})$ を結ぶ線分の長さを表す。

Theorem 4 曲線 $\varphi(t)$ $(a \leq t \leq b)$ の長さが有限とする。このとき、$l(\varphi) = \lim_{|\Delta| \to 0} l(\varphi, \Delta)$.

Theorem 5 $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ $(a \leq t \leq b)$ が C^1-曲線とする。すなわち、$x(t), y(t)$ が t の C^1-関数とする。このとき、φ は長さ有限で、

$$l(\varphi) = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt.$$

Remark 6 (極限 $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ について)
この極限を考えているときは、角度は弧度法で考えていることに注意せよ。すなわち、半径 1 の円は長さ有限な単純閉曲線である。(**ただし、長さ有限ということを単純に円の表示** $\varphi(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ **と Theorem 5 を用いて言おうとするのは理論的におかしい。なぜか?**) したがって、その長さが決まるがその値が 2π となるように π を決める。次にこの意味で角度 x で決まる $\sin x$(したがって、それは直角三角形の斜辺の長さ) とその角度 x の見込む弧の長さ x の比 $\frac{\sin x}{x}$ が 1 に収束することを主張していることになる。したがって、この極限の正確な理解には曲線の長さの定義が必要なことに注意せよ。正確な証明は教科書 *18,19* ページを参照せよ。

5. 平面上の積分

5.1 積分の定義

$E = \{(x, y) \mid x \in [a, b], y \in [c, d]\}$ とする。$f(x, y)$ を E 上の有界関数とする。$f(x, y)$ の E 上の積分 $\iint_E f(x, y)\,dxdy$ の定義を与える。

Definition 7 E の分割

$$\Delta: \ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \quad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$$

に対し、

$$\begin{aligned} S(f,\Delta) &= \sum_{1\le i\le n, 1\le j\le m} \sup\{f(x,y) \mid x_{i-1}\le x\le x_i, y_{j-1}\le y\le y_j\}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \\ s(f,\Delta) &= \sum_{1\le i\le n, 1\le j\le m} \inf\{f(x,y) \mid x_{i-1}\le x\le x_i, y_{j-1}\le y\le y_j\}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}). \end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned} S(f) &= \inf\{S(f,\Delta) \mid \Delta \text{ はすべての分割を動く }\} \\ s(f) &= \sup\{s(f,\Delta) \mid \Delta \text{ はすべての分割を動く }\} \end{aligned}$$

$S(f), s(f)$ については次の Darboux の定理が基本的である。

Theorem 8 Δ に対して $|\Delta| = \max\{x_i - x_{i-1}, y_j - y_{j-1} \mid 1\le i\le n, 1\le j\le m\}$ とおく。$\lim_{|\Delta|\to 0} S(f,\Delta) = S(f)$, $\lim_{|\Delta|\to 0} s(f,\Delta) = s(f)$ が成立する。

Definition 9 $S(f) = s(f)$ のとき、$f(x,y)$ は E 上可積分と言い、この共通の値を $\iint_E f(x,y)dxdy$ と書く。

積分に基づいて面積の定義を与える。有界集合 $A \subset \mathbb{R}^2$ を考える。

$$1_A(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y)\in A \\ 0 & (x,y)\in A^c \end{cases} \tag{3}$$

と定義し、1_A を A の定義関数と言う。

Definition 10 (有界集合の面積の定義) $A \subset E$ となる長方形を一つ取る。1_A が E で可積分のとき、

$$|A| = \iint_E 1_A(x,y)dxdy. \tag{4}$$

この定義で、ある E に対して 1_A が可積分ならば他の A を含む長方形 E' についても 1_A は E' 上可積分で

$$\iint_E 1_A(x,y)dxdy = \iint_{E'} 1_A(x,y)dxdy$$

が成立する。したがって、A の面積 $|A|$ の定義は E の取り方にはよらない。

例題 非負値有界関数 $f(x)$ $(a\le x\le b)$ が積分可能とする。このとき、集合

$$A = \{(x,y) \mid a\le x\le b, 0\le y\le f(x)\}$$

の面積は確定し、

$$|A| = \int_a^b f(x)dx$$

となる。