Wallisの公式について

1. Wallisの公式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\sqrt{n}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

を次にしたがって示せ。

$$I_n=\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^n d\theta \qquad (n\geq 0).$$

とおく。

(1) 部分積分を行い、I_n を I_{n-2} で表せ。

(2)

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2} \\ I_{2n+1} &= \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \end{aligned}$$

を示せ。ただし、$(2n)!!=2n\cdot(2n-2)\cdots 4\cdot 2, (2n+1)!!=(2n+1)\cdot(2n+3)\cdots 3\cdot 1.$

(3) $0\leq\sin\theta\leq 1$ を用いて

$$\frac{2n+1}{2n+2}=\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}}\leq\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}\leq 1 \quad (n\geq 0)$$

を示せ。

(4) (3) より $\lim_{n\to\infty}\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}=1$ となるが、具体的に $\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}$ を計算することにより、Wallisの公式を示せ。

2. Wallisの公式の応用として、次の積分の値を計算しよう。

$$I=\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx.$$

(1) $x>0$ のとき、 $1-x^2<e^{-x^2}<\frac{1}{1+x^2}$ を示せ。

(2) $I=\sqrt{n}\int_0^{\infty}e^{-nx^2}dx$ を示せ。

(3)

$$\sqrt{n}\int_0^1(1-x^2)^n dx\leq I\leq\sqrt{n}\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^n}dx$$

を示せ。

(4) それぞれ $x=\cos\theta$, $x=\cot\theta$ と置換積分することにより、

$$\begin{aligned} \int_0^1(1-x^2)^n dx &= I_{2n+1} \\ \int_0^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^n}dx &= I_{2n-2} \end{aligned}$$

を示せ。

(5) Wallisの公式を用いて、$I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を示せ。