広義積分 (I)(10/30)

今回の講義の内容は

1. 有界区間での広義積分の定義と収束の判定条件

である。

Definition 1 $f(x)$ を区間 $(a,b]$ 上の関数とする $(-\infty < a < b < +\infty)$。

次を仮定する：

(1) 任意の $c \in (a,b)$ に対して、$f(x)$ は $[c,b]$ 上で有界かつ積分可能である。$f(x)$ は a の近くで *(*数学用語では"近傍"で*)* 有界な関数では無い。

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{c\to a+0}\int_c^b f(x)dx$ が存在するとき、$f(x)$ は $(a,b]$ で広義積分可能であるといい、この極限値を $\int_a^b f(x)dx$ と書く。

注 次のことを注意しておく:

Theorem $f(x)$ が $[a,b]$ で有界な関数とする。かつ任意の $c \in (a,b)$ に対して、$f(x)$ は $[c,b]$ 上で積分可能であるとする。さらに $\displaystyle\lim_{c\to a+0}\int_c^b f(x)dx$ が存在するとき、$f(x)$ は $[a,b]$ で広義ではないこれまで学んできた意味で積分可能であることが証明できる。

例えば、

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & (0 < x \le 1) \\ 0 & (x = 0) \end{cases} \tag{1}$$

という関数は $\lim_{x\to 0} f(x)$ は存在せず、一見 $[0,1]$ 上で積分を考えるとき、広義積分になるように思えるが、関数としては有界な関数であるから、広義積分では無い。これが、$[0,1]$ で可積分であることを見るには、上の定理を用いるか、$f(x)$ は $[0,1]$ 上で不連続点は $x=0$ だけという関数であることに注意すればよい (「不連続点が有限個の有界関数は積分可能である」ことはすでに注意した)。また、$f(0)=0$ としたが、0 以外のどんな値にしても積分の値は変わらない。

広義積分の例をあげる。

例

(1) $f(x) = \dfrac{1}{x^s}$ $(s > 0)$ この $f(x)$ の $(0,a]$ $(a > 0)$ での積分は広義積分になる。結果は

$$\int_0^a \frac{1}{x^s}dx = \begin{cases} \frac{a^{1-s}}{1-s} & (0 < s < 1) \\ +\infty & (s \ge 1) \end{cases} \tag{2}$$

したがって、$0 < s < 1$ のとき広義積分可能である ($s \le 0$ なら通常の意味で積分可能である)。

(2) $f(x) = \log x$ $(0 < x \le 1)$

$$\int_0^1 \log x dx = -1$$

上の (1),(2) のように極限値 $\displaystyle\lim_{c\to a+0}\int_c^b f(x)dx$ が計算できて広義積分可能とわかるのは非常に限られている。したがって、いつ広義積分が収束するかの判定条件が重要である。

Theorem 2 $f(x)$, $g(x)$ を $(a,b]$ 上の関数で次の $(1),(2),(3)$ をみたすとする。
(1) 任意の $a<c<b$ に対して、$f(x),g(x)$ は $[c,b]$ で有界・可積分。
(2) すべての $x \in (a,b]$ について $|f(x)| \le g(x)$.
(3) $\displaystyle\lim_{c\to a+0}\int_c^b g(x)dx$ が有限な値に収束する (すなわち $g(x)$ は $(a,b]$ で広義積分可能)。このとき、$\displaystyle\lim_{c\to a+0}\int_c^b f(x)dx$ の有限な極限が存在する。すなわち $f(x)$ は $(a,b]$ で広義積分可能である。

この定理の系として、

Corollary 3 $f(x)$ を $(a,b]$ 上の関数とし、次の $(1),(2)$ を仮定する。
(1) 任意の $a<c<b$ に対して、$f(x)$ は $[c,b]$ で有界・可積分。
(2) ある正数 C と $0<s<1$ が存在して、任意の $a<x<b$ に対して、$|f(x)| \le \dfrac{C}{(x-a)^s}$. このとき、$f(x)$ は $(a,b]$ で広義積分可能。

Theorem 2 は次の二つの補題を用いて証明される。

Lemma 4 $F(x)$ を $(a,b]$ 上の関数とする。次の $(1),(2)$ は同値である。
(1) $\displaystyle\lim_{x\to a+0} F(x)$ がある有限な値に収束する。
(2) 任意の $\varepsilon>0$ に対して、ある $\delta>0$ が存在して $a<x_i<a+\delta$ $(i=1,2)$ をみたす任意の x_1,x_2 に対して、$|F(x_1)-F(x_2)| \le \varepsilon$.

Lemma 5 $f(x),g(x)$ を $[x_1,x_2]$ 上の有界・可積分な関数ですべての $x_1 \le x \le x_2$ に対して $|f(x)| \le g(x)$ とする。このとき、

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| \le \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|dx \le \int_{x_1}^{x_2} g(x)dx.$$

Theorem 2 から次の結果もただちにわかる。

Corollary 6 $f(x)$ を $(a,b]$ 上の関数とし、$f(x),|f(x)|$ ともに任意の $a<c<b$ に対して、$[c,b]$ 上で積分可能とする。$|f(x)|$ が $(a,b]$ で広義積分可能なら、$f(x)$ も $(a,b]$ で広義積分可能。

Definition 7 上記の *Corollary* のように $f(x),|f(x)|$、両方の広義積分が収束するとき、$f(x)$ の広義積分は絶対収束すると言う。$f(x)$ の広義積分は収束し、$|f(x)|$ の広義積分が収束しないこともある。このとき、$f(x)$ の広義積分は条件収束すると言う。

例えば、$f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ $(0<x\le 1)$ は $(0,1]$ で条件収束するが絶対収束しない広義積分の例を与える。

ここまで、$x=a$ の近くでのみ非有界となる関数を考えてきたが、もっと一般に複数個の点の近くで非有界となる広義積分の定義も同様である。

例えば、(a,b) 上の関数 $f(x)$ が $x=a,b$ の近くで非有界で (a,b) に含まれる任意の閉区間で積分可能とする。

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0,\varepsilon'\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon'} f(x)dx$$

と定義される。ε,ε' は互いに無関係に極限を取ることに注意してほしい。また、$a<c<b$ をみたす数を勝手にとり、

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{c} f(x)dx + \lim_{\varepsilon'\to+0}\int_c^{b-\varepsilon'} f(x)dx$$

と定義しても同じである。