

## リーマン積分の定義：Darbouxの上積分、下積分

**Definition 1 (Darbouxの上積分・下積分)**  $a < b$ となる二つの実数  $a, b$  を取り、有界閉区間  $I = [a, b]$  を考える。

(1) 数列  $\{a_i\}_{i=0}^n$  が

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b \quad (1)$$

を満たすとき、 $I$  の分割と言う。分割は  $\Delta$  で表すことにする。 $n$  は自然数であり、とくに  $a_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$  のときは、 $I$  の  $n$  等分の分割である。また、 $I$  の分割  $\Delta = \{a_i\}_{i=0}^n$  に対して  $|\Delta| = \max_{1 \leq i \leq n} (a_i - a_{i-1})$  と書くことにする。

(2)  $f(x)$  を  $I$  上の有界関数とする。すなわちある数  $M > 0$  が存在して  $|f(x)| \leq M$  ( $\forall x \in I$ ) とする。 $I$  の分割  $\Delta = \{a_0, \dots, a_n\}$  に対して

$$S(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n \sup \{f(x) \mid x \in [a_{i-1}, a_i]\} (a_i - a_{i-1}) \quad (2)$$

$$s(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n \inf \{f(x) \mid x \in [a_{i-1}, a_i]\} (a_i - a_{i-1}). \quad (3)$$

$S(f, \Delta)$  は *Darboux (ダルブー)* の過剰和、 $s(f, \Delta)$  は *Darboux* の不足和と言う。

$f$  の区間  $I$  での上積分  $S(f)$ , 下積分  $s(f)$  を

$$S(f) = \inf \{S(f, \Delta) \mid \Delta \text{ は } I \text{ のすべての分割を動く。}\} \quad (4)$$

$$s(f) = \sup \{s(f, \Delta) \mid \Delta \text{ は } I \text{ のすべての分割を動く。}\} \quad (5)$$

と定義する。 $S(f) = s(f)$  のとき、 $f(x)$  は  $I$  で積分可能と言う。この値を  $f$  の  $I$  での積分と言い、 $\int_{[a,b]} f(x) dx$  (または  $\int_a^b f(x) dx$ ) と書く。

$S(f), s(f)$  はそれぞれ、ある数の集合の下限、上限で定義されている。したがって、それらの集合が下に有界、上に有界で無ければならない。これは、

$$\inf_{x \in I} f(x)(b-a) \leq S(f, \Delta), \quad s(f, \Delta) \leq \sup_{x \in I} f(x)(b-a)$$

から分かる。 $S(f, \Delta), s(f, \Delta)$  の基本的な性質をまとめる。その前に言葉を一つ用意する。

**Definition 2** (1)  $I = [a, b]$  の二つの分割  $\Delta = \{a_i\}_{i=0}^n, \Delta' = \{a'_i\}_{i=0}^m$  を考える。 $\Delta'$  が  $\Delta$  の細分であるとは  $\Delta$  の分割点  $\{a_i\}_{i=0}^n$  が  $\Delta'$  の分割点  $\{a'_i\}_{i=0}^m$  にすべて含まれているときに言う。

(2)  $I$  の二つの分割  $\Delta_1 = \{\alpha_i\}_{i=0}^n, \Delta_2 = \{\beta_i\}_{i=0}^m$  に対して二つの分点を合わせた集合  $\{\alpha_i\}_{i=0}^n \cup \{\beta_i\}_{i=0}^m$  を分割点とする分割を  $\Delta_1 \vee \Delta_2$  と書くことにする。 $\Delta_1 \vee \Delta_2$  は  $\Delta_1, \Delta_2$  の細分である。

以下、特に断らない限り、 $f(x)$  は有界な関数とする。

**Proposition 3** (1) 任意の分割  $\Delta$  に対して

$$\inf_{x \in I} f(x)(b-a) \leq s(f, \Delta) \leq S(f, \Delta) \leq \sup_{x \in I} f(x)(b-a).$$

(2)  $\Delta'$  が  $\Delta$  の細分とすると

$$s(f, \Delta) \leq s(f, \Delta'), \quad S(f, \Delta') \leq S(f, \Delta).$$

(3) 任意の分割  $\Delta_1, \Delta_2$  に対して、

$$s(f, \Delta_1) \leq S(f, \Delta_2).$$

(4) 任意の  $f$  に対して  $s(f) \leq S(f)$ .

(5) 有界関数  $f(x)$  が与えられたとすると適当な分割の列  $\Delta_n$  で次の性質を満たすものがある。

(i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\Delta_n| = 0$ .

(ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, \Delta_n) = S(f), \lim_{n \rightarrow \infty} s(f, \Delta_n) = s(f)$

例  $f(x) = x, I = [0, R]$  のとき、 $f(x)$  は積分可能で、 $\int_0^1 x dx = \frac{R^2}{2}$ . これは、上の定義を次の順番でチェックして示される。

(i)  $|S(f, \Delta) - s(f, \Delta)| \leq |\Delta|$  (ii)  $\frac{S(f, \Delta) + s(f, \Delta)}{2} = \frac{R^2}{2}$ .

(i), (ii) から

$$\frac{R^2}{2} - \frac{|\Delta|}{2} \leq s(f, \Delta) \leq S(f, \Delta) \leq \frac{R^2}{2} + \frac{|\Delta|}{2}. \quad (6)$$

$\Delta_n$  という分割を  $|\Delta_n| \rightarrow 0$  かつ  $\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, \Delta_n) = S(f), \lim_{n \rightarrow \infty} s(f, \Delta_n) = s(f)$  をみたす分割に対して (6) を適用すれば証明は終る。

実は Darboux により次が示されている。

**Theorem 4**  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\Delta_n| = 0$  ならば  $\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, \Delta_n) = S(f), \lim_{n \rightarrow \infty} s(f, \Delta_n) = s(f)$ .

これから

**Corollary 5** 次の (1), (2) は同値である。

(1)  $f(x)$  は  $I$  上可積分である。

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\Delta_n| = 0$  となる分割の列で  $\lim_{n \rightarrow \infty} (S(f, \Delta_n) - s(f, \Delta_n)) = 0$  となるものが存在する。

この講義では Darboux による上積分、下積分を用いて積分を定義したが、これは次の定義とも同値になる。

**Definition 6**  $f(x)$  を  $I = [a, b]$  上の有界関数とする。  $\Delta = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$  を  $I$  の分割とする。更に点列  $\{\xi_i\}_{i=1}^n$  を  $a_{i-1} \leq \xi_{i-1} \leq a_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) をみたすようにとる。

$$I(f, \{\xi_i\}, \Delta) = \sum_{i=1}^n f(\xi_{i-1})(a_i - a_{i-1}) \quad (7)$$

と書き、 $f(x)$  のリーマン和と呼ぶ。  $|\Delta| \rightarrow 0$  のとき、 $\{\xi_i\}$  の取り方によらず  $I(f, \xi_i, \Delta)$  が一定の値に収束するとき  $f(x)$  は  $I$  で可積分であるといい、極限値を  $\int_a^b f(x) dx$  と書く。

**Remark 7**

$$s(f, \Delta) \leq I(f, \{\xi_i\}, \Delta) \leq S(f, \Delta)$$

が常に成り立つ。