広義積分 (1/8)

5.5 変数変換の公式 (補足)

先週、積分に関する変数変換の公式を説明したが、その証明では次の二つの定理 (Theorem 2 はすでに 12 月 18 日のプリントに出てきている) ことが使われる。講義では、このことを用いて変数変換の公式の証明の筋道の概略を説明する。

Theorem 1 (1) 平面内の長方形の面積は**縦の長さ×横の長さ**で与えられる。
(2) 平面内の三角形の面積は **(底辺の長さ×高さ) ÷ 2** になる。
(3) 平面内の二つのベクトル $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ で張られる三角形の面積は $\frac{1}{2}|ad-bc|$ で与えられる。

これまで、長方形の面積は「縦×横」ということを使って積分, 面積の定義をしてきたのに、わざわざ、(1) のようにあらためて定理の形で述べる必要があるのか不思議に思う人もいるかもしれない。しかし、注意して欲しいのはこれまで、長方形の面積は「縦×横」と言ってきたのは、(x,y) 平面で縦、横が x 軸、y 軸に平行な長方形のみであり、そうでないものについては、面積の定義に帰って計算する必要があるのである。上記の (1),(2) は累次積分などで証明されることになる。(3) は (2) を使うと証明できることである。

Theorem 2 A を $\mathbb{R}^2$ の面積確定有界集合とする。$f(x,y)$ を A 上の有界連続関数とする。A の分割 Δ: $A=\cup_{i=1}^n A_i$ を考える。ただし、各 A_i はやはり面積確定集合で、$A_i \cap A_j$ の面積は 0 とする。また、各小領域 A_i から *1* 点 $P_i(\in A_i)$ を選んでおく。ここで、$|\Delta|=\max_{1\le i\le n}\delta(A_i)$ と定める。ここで $\delta(A_i)$ は A_i を含む円全体を考えてその直径の下限をあらわす。

$$I(f,\{P_i\},\Delta)=\sum_{i=1}^n f(P_i)|A_i|$$

とおく。$|A_i|$ は A_i の面積を表す。$\lim_{|\Delta|\to 0} I(f,\{P_i\},\Delta)$ は積分 $\iint_A f(x,y)dxdy$ の値に収束する。

5.6 広義積分

平面上の積分に対して広義積分を定義する。代表的な積分をあげる。

(1) $J(\alpha,R)=\iint_{\{(x,y)\ |\ x^2+y^2\le R^2\}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}^{\alpha}}dxdy \qquad (\alpha>0)$

(2) $K(\alpha,R)=\iint_{\{(x,y)\ |\ x^2+y^2\ge R^2\}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}^{\alpha}}dxdy \qquad (\alpha>0)$

(3) $I=\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy$

(1) は関数 $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}^{\alpha}}$ が原点で発散していることから積分領域は $\{(x,y)\ |\ 0<x^2+y^2\le R\}$ と書くべきだが、ルーズに (1) のように積分範囲を書くことが多い。

定義は以下のようになる。

Definition 3 A を (x,y) 平面の領域、$f(x,y)$ を A 上の関数とする。
(1) $f(x,y)$ が A 上で有界な関数ではないとき、または A が有界な集合でないときの $f(x,y)$ の A 上での積分を広義積分と言い、以下の (2) のように定義する。
(2) A の部分集合の列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ で次の性質を持つものがあるとする。

(i) A_n は面積確定有界領域で $f(x,y)$ は A_n で有界かつリーマン積分可能

(ii) $A_1 \subset A_2 \subset \cdots A_n \cdots$

(iii) $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = A$

(iv) 有限な極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \iint_{A_n} |f(x,y)| dxdy$ が存在する

このとき、$f(x,y)$ は A 上で広義積分可能であると言う。また、極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \iint_{A_n} f(x,y) dxdy$ が有限な値に収束することが示せる。この極限値を $f(x,y)$ の A 上での広義積分と言い $\displaystyle\iint_A f(x,y) dxdy$ と書く。

(**注**)
(1) 有界関数 $f(x,y)$ が面積確定集合 A 上でリーマン積分可能なら、$|f(x,y)|$ も A で積分可能であることが積分の定義からわかる。
(2) 上記の定義では、A を覆いつくす有界領域の増大列 $\{A_n\}$ を一つ取ったが、この定義は増大列の取りかたにはよらない。すなわち、$\{A_n\}$ について、(i),(ii),(iii),(iv) が成立していると、(i),(ii),(iii) をみたす任意の $\{A'_n\}$ について有限な極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \iint_{A'_n} |f(x,y)| dxdy$ が存在することが証明でき、かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \iint_{A'_n} f(x,y) dxdy$ の極限値も $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \iint_{A_n} f(x,y) dxdy$ と一致する。
(3) 一変数関数 $f(x)$ が $[a,+\infty)$ 上の関数のとき、広義積分を $\displaystyle\lim_{c\to\infty} \int_a^c f(x) dx$ と定義した。また、$\displaystyle\lim_{c\to\infty} \int_a^c |f(x)| dx$ が収束するときは $\displaystyle\lim_{c\to\infty} \int_a^c f(x) dx$ の極限も存在することが証明できると説明し、このとき広義積分は絶対収束すると言うと定義した。この定義によると、上記の定義は絶対収束する広義積分のみを考えていることになる。多次元の場合は絶対収束するもののみを考えるのが普通である。
(4) 冒頭にあげた例では、極座標を用いた変数変換の公式を用いて

(i) $\alpha \geq 2$ のとき $J(\alpha,R) = +\infty$, $\alpha < 2$ のとき、$J(\alpha,R) = \dfrac{2\pi}{2-\alpha} R^{2-\alpha}$

(ii) $\alpha \leq 2$ のとき、$K(\alpha,R) = +\infty$, $\alpha > 2$ のとき $K(\alpha,R) = \dfrac{2\pi}{\alpha-2} R^{2-\alpha}$.

(iii) $I = \pi$

が示せる。いずれも基本的な結果である。特に (i),(ii) については、$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx, \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$ の収束・発散の境目が $\alpha = 1$(実数の空間の次元) なのに対し、平面の次元 $\alpha = 2$ であることに注意せよ。
同様に 3 次元空間上の積分 $\displaystyle\iiint_{\{(x,y,z)\ |\ x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{\alpha}} dxdydz$ などの収束・発散も, 次元の 3, $\alpha = 3$ が境目になる。