数学解析レポート問題 2

(教育実習生用, 6 月 21 日締め切り)

1.
(1) $(X, (\ .\ ))$ をヒルベルト空間とする。任意の $x, y \in X$ に対して次の関係式 (Pappos の中線定理) が成立することを示せ。

$$\|x-y\|^2 + \|x+y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \tag{1}$$

(2) $Y = C([0,1] \to \mathbb{R})$ とおく。$x \in Y$ に対して $\|x\| = \max_{0\le t\le 1} |x(t)|$ は Y 上のノルムになる。Pappos の中線定理がなりたたない $x, y \in Y$ の例を求める事により $(Y, \|\ \|)$ はヒルベルト空間にはならないことを示せ。

2. $\mathbb{R}$ 上の連続関数 $\varphi(x)$ でつねに $\varphi(x) > 0$ かつ任意の $K > 0$ に対して $\int_{\mathbb{R}} e^{K|x|}\varphi(x)dx < \infty$ とする。

$$X := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \varphi(x)dx < \infty \right\}$$

において内積を $(f, g) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\varphi(x)dx$ と定め、ヒルベルト空間を定義する。
$\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$ から Schmidt の直交化法で作った完全正規直交系をその操作でできた順番で並べたものを $\{e_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ とする。
(1) $e_n(x)$ は n 次多項式であることを示せ。
(2) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e_n(x)x^k\varphi(x)dx = 0 \quad (k = 0, \ldots, n-1)$ を示せ。
(3) $p_n(x)$ を n 次多項式とし、$\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ がやはり X の正規直交系をなすとする。このとき、$p_n(x) = e_n(x)$ または $p_n(x) = -e_n(x)$ が成立することを示せ。

3. $L^2([-1,1], dx)$ で $\left\{ \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \sin(n\pi x), \cos(n\pi x) \;|n = 1, 2, \ldots \right\}$ は完全正規直交系になることが知られている。これを用いて $\left\{ \sqrt{2}\sin(n\pi x) \mid n = 1, 2, \ldots \right\}$ が $L^2([0,1], dx)$ 上で完全正規直交系になることを次に従い示せ。
(1) $\left\{ \sqrt{2}\sin(n\pi x) \mid n = 1, 2, \ldots \right\}$ が $L^2([0,1], dx)$ の正規直交系をなすことを示せ。
(2) $f \in L^2([0,1], dx)$ に対して、

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & (0 \le x \le 1) \\ -f(-x) & (-1 \le x < 0) \end{cases}$$

と定める。$\hat{f} \in L^2([-1,1], dx)$ を示せ (ルベーグ積分を習っていない人は $f(x)$ がリーマン積分可能な関数、たとえば連続関数と思ってもよい)。
(3) $\hat{f}$ を上の三角関数系で $L^2([-1,1], dx)$ の元として直交展開することにより、

$$\left\{ \sqrt{2}\sin(n\pi x) \mid n = 1, 2, \ldots \right\}$$

が完全正規直交系をなすことを示せ。