数学解析レポート問題 1 (〆切は 5 月 10 日)

1. (X, d) を距離空間とする。X の部分集合 A が開集合であるとは任意の $a \in A$ に対して、ある正数 ε が存在して $B_\varepsilon(a) \subset A$ となることを言う。ただし、$B_\varepsilon(a) = \{x \in X \mid d(a, x) < \varepsilon\}$ と定義されている。このとき、講義で与えた閉集合の定義に基づき、X の部分集合 A に対する次の性質は同値であることを証明せよ。

(1) A は閉集合である。
(2) A^c は開集合である。

2. X を $[0,1]$ 上の C^1 級の関数で $x(0) = 0$ となるもの全体とする。$x \in X$ に対して、

$$\|x\|_1 = \sup_{0 \le t \le 1} |x(t)|, \tag{1}$$

$$\|x\|_2 = \left\{ \int_0^1 |x'(t)|^2 dt \right\}^{1/2} \tag{2}$$

とおく。

(1) $\| \ \|_2$ がノルムになることを示せ。
(2) すべての $x \in X$ について、

$$\|x\|_1 \le \|x\|_2$$

となることを示せ。
(3) ある定数 $C > 0$ が存在して、すべての $x \in X$ に対して、

$$\|x\|_2 \le C\|x\|_1$$

となるか? 成立するならば、証明し、成立しないならそれを示せ。

3. $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して $\|x\|_{l^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ とおく。このとき、任意の $\mathbb{R}^n$ 上のノルム $\| \ \|$ に対して適当な正の数 C_1, C_2 $(C_1 \le C_2)$ が存在してすべての $x \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$C_1\|x\|_{l^2} \le \|x\| \le C_2\|x\|_{l^2}$$

となることを示せ。