数列の極限、関数の極限、関数の連続性について (高校の復習)

Definition 1 (1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して n が大きくなるとき a_n が実数 α に限りなく近くなるとき、$\{a_n\}$ は α に収束するといい $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ と書く。n が大きくなるとき a_n が限りなく大きくなるとき、$\{a_n\}$ は $+\infty$ に発散すると言い、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ と書く。
(2) 関数 $y = f(x)$ に対して x が a に近づくとき $f(x)$ が限りなく A に近づくとき $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = A$ と書く。関数 $y = f(x)$ に対して x が a に近づくとき $f(x)$ が限りなく大きくなるとき、$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ と書く。
(3) 関数 $y = f(x)$ について、定義域の点 a で極限値 $\lim_{x\to a} f(x)$ が存在し $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ となるとき、関数 $y = f(x)$ は $x = a$ で連続であるという。定義域の各点で連続な関数を連続関数と言う。

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha, \infty$ の定義もあるが省略する。上の定義は直感的でわかりやすく、初等的な段階では、これで十分だが深く学ぶには不十分である。そのため、後で厳密な定義を学ぶ。数列の極限・関数の極限に関しては次が基本的であり、高校の教科書にも載っている。これらも直感的には明らかだが、きちんとした極限の定義に基づいて証明することができる。

Theorem 2 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とする。このとき次が成立する。
(1) 任意の実数 c に対して、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} ca_n = c\alpha.$
(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta.$
(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta.$
(4) $\beta \neq 0$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}.$

Theorem 3 (はさみうちの原理) 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ が $a_n \leq b_n \leq c_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ および $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$ をみたすならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha.$

Theorem 4 $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$ とする。このとき次が成立する。
(1) 任意の実数 c に対して、$\displaystyle\lim_{x\to a} cf(x) = cA.$
(2) $\displaystyle\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = A + B.$
(3) $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB.$
(4) $B \neq 0$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$

Theorem 5 (はさみうちの原理) 関数 $f(x), g(x), h(x)$ に対して、a の近くで $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ をみたし、$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = \alpha$ をみたすならば $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x) = \alpha.$

Theorem 6 $f(x), g(x)$ は同じ集合で定義された連続関数とする。このとき、それらの和、積、定数倍すなわち $f(x) + g(x), f(x)g(x), cf(x)$ も同じ集合上で連続関数である。また、$g(x) \neq 0$ ならば $\frac{f(x)}{g(x)}$ も連続関数である。

連続関数に対して、次の性質が成り立つ。これらは今日説明する実数の性質を用いて証明できる。

Theorem 7 (中間値の定理) $y = f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数とする。$f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の値 α に対して、a と b の間の数 c が存在して $f(c) = \alpha$ となる。

Theorem 8 (最大値・最小値の存在定理) $y = f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数とする。このとき、関数 $f(x)$ には最大値、最小値が存在する。ただし、M が最大値であるとは $[a, b]$ のある点 α で $f(\alpha) = M$ となり、すべての $x \in [a, b]$ に対して $f(x) \leq M$ となるときに言う。m が最小値であるとは $[a, b]$ のある点 β で $f(\beta) = m$ となり、すべての $x \in [a, b]$ に対して $m \leq f(x)$ となるときに言う。