

## 数学解析 予定表

この講義を理解するにはルベーク積分の知識があるのが望ましいが、知らなくても理解できるよう講義します。なお、以下の\*の項目は、ルベーク積分を知っておくのがよい項目、\*\*の項目は理解にルベーク積分の知識が必要な項目です。

### 0. なぜ、関数解析が必要か?

#### 1. 位相の復習

距離空間、連続写像、点列の収束、極限の概念、閉集合、完備性

#### 2. ノルム空間

##### (1) ノルムの定義

##### (2) \* Hölder の不等式、Minkowski の不等式

##### (3) \* $l^p, L^p$

##### (4) ノルム空間の位相

##### (5) 可分性

##### (6) Weierstrass の多項式近似定理 (確率論を用いた Bernstein の証明)

##### (7) Banach 空間の定義、例

##### (8) ノルム空間の完備化 ( $\mathbb{Q}$ の完備化から $\mathbb{R}$ を作ったように、完備でないノルム空間は適当に元を加えて完備な空間にできる。 $C([0, 1] \rightarrow \mathbb{R})$ を $L^p$ の位相でこの方法で完備化したものの具体的な表現が $L^p([0, 1], dx)$ だと言える)

#### 3. ヒルベルト空間

##### (1) プレヒルベルト空間：定義と例

##### (2) \* ヒルベルト空間の定義、例、 $l^2, L^2$

##### (3) 完全正規直交系 (=CONS) とその性質

##### (4) CONS, 例、Fourier 級数、Hermite 多項式、Wavelet 固有関数の視点、対称行列の異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交すること。

##### (5) Parseval の等式、Bessel の不等式

##### (6) CONS の存在

##### (7) 直交射影、凸集合の場合への拡張を注意

##### (8) 直交補空間

(9) \*\* 条件つき平均値、マルチンゲールの定義と直交射影との関連

#### 4. 有界線形作用素

(1) 定義と性質

(2) 有界線形作用素全体が作用素ノルムで Banach 空間になること

(3) 有界線形作用素の例 (合成積による作用素、ハウスドルフ・ヤングの不等式 \*, マルコフ半群についての注意)

(4) Riesz の表現定理

(5) \*\* 共役空間 (双対空間) の定義と例 ( $(L^p)^* = L^q$  ただし、 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, 1 \leq p < \infty$  一般には  $(L^\infty)^* \supsetneq L^1$ ).

(6) \*\* Radon-Nykodim の定理 (Riesz の表現定理の応用)

(7) Neumann 級数と積分方程式 (とくに Volterra 型について)

(8) 縮小写像の原理とその応用例

#### 5. 非有界作用素

(1) 閉作用素、可閉作用素の定義、例

(2) 随伴作用素、自己共役作用素

(3) スペクトル集合、レゾルベント集合 (例、Volterra 型積分作用素)

(4) コンパクト作用素の定義、スペクトルに対する注意

(5) \*\* 自己共役作用素のスペクトル分解の注意

測度論の参考書は

1. 「ルベーグ積分」(竹之内脩著、培風館)
2. 「ルベーグ積分入門」(伊藤清三著、裳華房)
3. 「ルベーグ積分から確率論」(志賀徳造著、共立出版)
4. 「確率論」(伊藤雄二著、朝倉書店)
5. 「実解析と測度論の基礎」(盛田健彦著、培風館)

どれも丁寧に読めば力がつくと思います。5 はルベーグ積分のツボを押しているような本で、読むのは難しいかも知れませんが、面白い。リーマン積分についても興味深いことが書かれています。

関数解析の参考書としてシラバスにあげた以外に

1. *Functional Analysis*, Reed-Simon 著, Academic Press
2. 「ヒルベルト空間と量子力学」新井朝雄著、共立出版
3. 「フーリエ解析と関数解析学」新井仁之著、培風館

が参考になる。1,2 とともに量子力学を意識した内容の本です。1 は *Methods of Modern Mathematical Physics* の 4 巻本の最初の 1 冊目で 2 冊目以後も面白い本です。3 はフーリエ解析、ウエイブレットについても触られています。やはり、これもヒルベルト空間について書かれた本で自己共役作用素のスペクトル分解も丁寧に書いてあります。