累次積分 (12 月 5 日)

5. 平面上の積分

注意：
来週は共通教育物理学棟 1 階数学計算機室で計算機実習を行います。
前期と場所が変わっていますので、注意して下さい。

5.2 可積分関数の例–補足–

この節ではどのような関数が可積分か述べてきたが、以下の定理が一番強い定理 (先週のプリントの Theorem 5, Theorem 7 がすべてこの定理を用いて証明できるという意味で) である。

Theorem 1 (1) $f(x,y)$ を面積確定な有界集合 A 上の有界関数で不連続点の集合の面積が 0 とする。このとき、$f(x,y)$ は A で可積分である。
(2) $f(x,y)$ が面積確定有界集合 A で可積分とする。有界関数 $g(x,y)$ が面積 0 の集合を除いて $f(x,y)$ と一致しているならば、$g(x,y)$ も A で可積分で、

$$\iint_A f(x,y)dxdy = \iint_A g(x,y)dxdy.$$

上の定理の (2) はすでに先週の Theorem 2(2) でも述べているが、この結果は一変数関数 $f(x)$ がリーマン積分可能ならばどこか有限個の x における値を変えても積分可能性、積分値が変わらないことに対応している。

5.3 累次積分

面積確定集合 A 上の連続関数 $f(x,y)$ は可積分であるとわかったが、それを具体的にどのように計算するか? が次の課題である。いちいちリーマン和の定義に立ち帰って計算するのは大変だし、具体的な値がわからないであろう。そのため、次の累次積分 (逐次積分とも言う) がよく使われる。

Theorem 2 (累次積分) $f(x,y)$ を $E = [a,b] \times [c,d]$ 上の連続関数とする。
(1) 任意の $y \in [c,d]$ に対して、$F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ で定義される関数 $F(y)$ は $[c,d]$ 上の連続関数で

$$\int_c^d F(y)dy = \iint_A f(x,y)dxdy.$$

(2) 任意の $x \in [a,b]$ に対して、$G(x) = \int_c^d f(x,y)dy$ で定義される関数 $G(x)$ は $[a,b]$ 上の連続関数で

$$\int_a^b G(x)dx = \iint_A f(x,y)dxdy.$$

これは次のように一般化される。

Theorem 3 (累次積分) $\varphi(x), \phi(x)$ $(a \le x \le b)$ を連続関数で、$\varphi(x) \le \phi(x)$ $(a \le x \le b)$ とする。

$$A = \{(x,y) \mid \varphi(x) \le y \le \phi(x), a \le x \le b\}$$

上の連続関数 $f(x,y)$ について、

$$\iint_A f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\phi(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

上の累次積分の応用として、次の不等式が証明できる。この不等式は FKG 不等式と呼ばれる統計力学で重要な不等式の簡単な形のものである。なお、FKG は C.Fortuin,P.Kasteleyn, J.Ginibre の 3 人の頭文字である。

演習問題 (参考) $f(x), g(x)$ を $[0,1]$ 上の単調増加な連続関数とすると

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)\left(\int_0^1 g(x)dx\right) \leq \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

が成立することを示せ。

一般に連続関数 $f(x), g(x)$ について成立する Schwarz の不等式

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left\{\int_a^b f(x)^2 dx\right\}^{1/2} \left\{\int_a^b g(x)^2 dx\right\}^{1/2}$$

と混同しないように。

5.4 –補足– $\mathbb{R}^3$ 上の積分について

ここまで $\mathbb{R}$ や $\mathbb{R}^2$ の部分集合上の積分を定義してきたが、全く同様に $\mathbb{R}^n$ 上の積分が定義できる。ここでは、$\mathbb{R}^3$ での図形の体積、積分について簡単な補足事項をまとめる。

Theorem 4 $\mathbb{R}^3$ 内の滑らかな曲面で囲まれた図形の体積は確定する。

Theorem 5 A を (x,y) 平面内の面積確定な有界集合とする。$\varphi(x,y), \phi(x,y)$ を A 上の有界連続関数で $\varphi(x,y) \leq \phi(x,y)$ $((x,y) \in A)$ をみたすとする。このとき、集合

$$B = \{(x,y,z) \mid \varphi(x,y) \leq z \leq \phi(x,y), (x,y) \in A\}.$$

の体積は確定で、

$$|B| = \iint_A (\phi(x,y) - \varphi(x,y))dxdy.$$

また、$f(x,y,z)$ が B 上の連続関数ならば f は B で積分可能で

$$\iiint_B f(x,y,z)dxdydz = \iint_A \left\{\int_{\varphi(x,y)}^{\phi(x,y)} f(x,y,z)dz\right\} dxdy.$$