実数の性質(４月２５日)

有理数の集合 $\mathbb{Q}$ から実数の集合 $\mathbb{R}$ を構成する方法はいくつか知られているが作り方によらずそれらはすべて同じ集合と見ることができる。実数の集合は数直線のようにイメージしやすいが、これまでの勉強ではきちんとした定義は与えられてはいず、定義が必要な物だと認識してほしい。

実数の集合は切れ目が無いということを表している「実数の連続性」または「実数の完備性」と呼ばれる性質を満たす。それを以下に Theorem 1, Theorem 2, Theorem 3 として書いておく。これらはすべて同値な性質である。

Theorem 1 数列 $\{a_n\}$ が次の性質をみたすとする。
(1) (上に有界) ある数 R が存在してすべての n について、$a_n \leq R.$
(2) (単調性) すべての n について $a_n \leq a_{n+1}.$
このとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ は収束する。

Theorem 1 を用いると $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ の収束がわかる。この極限値を e と書く。

Theorem 2 (1) A を $\mathbb{R}$ の上に有界な集合とする。このとき、A の上界全体の集合には最小数 λ が存在する。すなわち、
(i) すべての $x \in A$ に対して $x \leq \lambda.$
(ii) γ が A の上界の元ならば $\lambda \leq \gamma.$
(2) A を $\mathbb{R}$ の下に有界な集合とする。このとき、A の下界全体の集合には最大数 μ が存在する。すなわち、
(i) すべての $x \in A$ に対して $x \geq \mu.$
(ii) γ が A の下界の元ならば $\gamma \leq \mu.$

Theorem 2 の (1) の λ を A の上限と言い、$\sup A$ と表す。また、(2) の μ を A の下限と言い、$\inf A$ と表す。$\sup A$ や $\inf A$ は A の元のこともあればそうでないこともある。

Theorem 2 と次の連続関数の性質を用いると中間値の定理を証明することができる。中間値の定理の証明は講義の中で解説する。

Lemma 1 $f(x)$ をある区間 I 上の連続関数とする。
(1) $f(c) > \alpha$ ならば c を含む小さな区間 $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ をとれば $\forall x \in [c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ に対して、$f(x) > \alpha.$
(2) $f(c) < \alpha$ ならば c を含む小さな区間 $[c-\varepsilon', c+\varepsilon']$ をとれば $\forall x \in [c-\varepsilon', c+\varepsilon']$ に対して、$f(x) < \alpha.$

上記の Lemma はグラフを書けば、当然成り立つと予想できる。

Theorem 3 と Lemma 2 を用いると最大値・最小値の存在定理を証明できる。

Theorem 3 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $a \leq a_n \leq b$ を常に満たすとする。ただし、a, b はある実数である。このとき、$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の適当な部分列 $\{a_{n(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ が存在して $\displaystyle\lim_{k\to\infty} a_{n(k)}$ は収束するようにできる。また、その極限値は $[a, b]$ に含まれる。

Lemma 2 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ が収束するならば $\{a_n\}$ の任意の部分列 $\{a_{m(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ も $k \to \infty$ のとき、同じ値に収束する。

このLemma も直感的には自明である。

例 $a_n = (-1)^n$ とすれば $a_n \in [-1, 1]$ である。また部分列 a_{2n} は 1 に a_{2n+1} は -1 に収束する。Theorem 3 はどのような有界な数列に対しても、うまく部分列を取れば、収束するようにできると述べているのである。