# リーマン積分の定義：性質と連続関数の可積分性

今回の講義の内容は

1. リーマン積分の基本的な性質
2. 連続関数の一様連続性に基づいた可積分性の証明

である。

**Theorem 1** $a < b < c$ とし、$I = [a, b], J = [b, c]$ とおく。
(1) $f(x), g(x)$ が $I$ で可積分な関数ならば $f(x) + g(x),\ \alpha f(x) + \beta g(x)\ (\alpha, \beta \in \mathbb{R}),\ f(x)g(x)$ も可積分な関数で積分の線形性

$$\int_I (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_I f(x)dx + \beta \int_I g(x)dx$$

が成立する。
(2) $h(x)$ が $I,\ J$ それぞれで可積分ならば $h(x)$ は $I \cup J = [a, c]$ でも可積分で

$$\int_a^c h(x)dx = \int_a^b h(x)dx + \int_b^c h(x)dx$$

が成立する。
(3) すべての $x \in I$ について $m \leq f(x) \leq M$ ならば

$$m(b-a) \leq \int_I f(x)dx \leq M(b-a).$$

注 $a < b$ のとき積分 $\int_b^a f(x)dx$ ($a$ と $b$ が入れ替わっていることに注意) を

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

と定義すると $a, b, c$ の大小関係によらずつねに

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

が成立することになる。

Theorem 1 の証明には次の不等式とダルブーの定理を使えばよい。ただし、$p, q$ は $p < q$ をみたす実数, $f(x), g(x)$ は $[p, q]$ で有界な関数である。

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in[p,q]} (f(x)+g(x)) &\leq \sup_{x\in[p,q]} f(x) + \sup_{x\in[p,q]} g(x) \\
\inf_{x\in[p,q]} f(x) + \inf_{x\in[p,q]} g(x) &\leq \inf_{x\in[p,q]} (f(x)+g(x)) \\
\sup_{x\in[p,q]} (f(x)g(x)) - \inf_{x\in[p,q]} (f(x)g(x)) &\leq \left( \sup_{x\in[p,q]} f(x) - \inf_{x\in[p,q]} f(x) \right) \sup_{x\in[p,q]} |g(x)| \\
&\quad + \left( \sup_{x\in[p,q]} g(x) - \inf_{x\in[p,q]} g(x) \right) \sup_{x\in[p,q]} |f(x)|. \qquad (1)
\end{aligned}$$

積分の定義を与えたのはよいが、ではどのような関数が可積分か? が問題になる。以下の結果は基本的かつ重要である。

**Theorem 2** $f(x)$ が区間 $[a,b]$ で連続ならば積分可能である。

注意：(1) $f(x)$ は区間すべてで連続ではなくても
(i) 区間 $[a,b]$ で有界
(ii) $f(x)$ の $[a,b]$ での不連続点が有限個
ならば積分可能である。
(2) 次のような奇妙な関数も可積分関数であることが示せる。
$[1,2]$ を定義域とする関数で

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{p} & x \text{ は有理数で } x=\frac{q}{p} \text{ のとき。ただし } p,q \text{ は互いに素な正整数} \\ 0 & x \text{ が無理数のとき}\end{cases} \tag{2}$$

この関数は有理数のところで不連続、無理数のところでは連続な関数で不連続点が無限個ある関数であるが可積分である!

Theorem 2 の証明には関数の一様連続性とよばれる性質が使われる。比較のため、関数の連続性の定義もあわせて書いておく。

**Definition 3** $A \subset \mathbb{R}$ とする。
(1) $f(x)$ が $A$ 上で連続であるとは、任意の $a \in A,\ \varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して $|x-a| \le \delta$ をみたすすべての $x \in A$ について $|f(x)-f(a)| \le \varepsilon.$
(2) $f(x)$ が $A$ 上で一様連続であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して $|x_1 - x_2| \le \delta$ をみたすすべての $x_1, x_2 \in A$ について $|f(x_1)-f(x_2)| \le \varepsilon.$

一様連続な関数は連続関数だが、逆は成立しない。
例えば、
例 (1) $A=(0,1)$ を定義域とする関数 $f(x)=\frac{1}{x}$ は一様連続ではない。
(2) $A=(a,1)$ $a>0$ とおくと $f(x)=\frac{1}{x}$ は $A$ で一様連続である。
(3) $f(x)=\sin x$ $(A=\mathbb{R})$ は一様連続である。
(4) $f(x)=e^x$ $(A=\mathbb{R})$ は一様連続ではない。
(5) $f(x)=\log x$ $(A=[a,\infty))$ は一様連続である。ただし、$a>0.$

しかし、閉区間で連続な関数は一様連続である。
つまり

**Theorem 4** $f(x)$ が閉区間 $I=[a,b]$ で連続ならば一様連続である。

この結果は、「有界閉区間で連続な関数は最大値、最小値を取る」という結果と並んで有界閉区間上の連続関数の基本性質である。Theorem 4 を用いると Theorem 2 を証明することができる。

高校のときに定積分の計算に出て来た関数は連続関数であり、そのような関数は積分できる事がわかった。しかし、もちろんいちいち $\lim_{n\to\infty} S(f,\Delta_n)$ などを計算するのは大変なので、次の微積分法の基本定理により計算を行う事になる。次回はこの定理をもう少し詳しく解説する。

**Theorem 5** $f(x)$ を $I=[a,b]$ 上の連続関数とする。このとき、$F'(x)=f(x)$ $(x \in I)$ となる関数 ($f(x)$ の原始関数とよばれる) が存在する。しかも任意の $a \le \alpha < \beta \le b$ に対して

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = F(\beta)-F(\alpha).$$