広義積分 (II)

今回の講義の内容は

1. 有限区間での広義積分の収束の判定条件の証明と例
2. 無限区間での広義積分と例

である。このプリントでは 2 についてまとめておく。

4.2 無限区間での広義積分

Definition 1 $f(x)$: $[a,+\infty)$ 上の関数で次の (1) をみたすとする。
(1) 任意の $a < c < \infty$ に対して、$f(x)$ は $[a,c]$ 上で有界可積分関数
$\displaystyle\lim_{c\to\infty}\int_a^c f(x)dx$ が収束する時 $f(x)$ は $[a,+\infty)$ で広義積分可能と言い極限値を $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ と書く。

例
(1) $f(x) = \frac{1}{x^s}$ $(x \geq a > 0)$

(i) $s \leq 1$ のとき $\displaystyle\int_a^\infty \frac{1}{x^s}dx = +\infty.$

(ii) $s > 1$ のとき $\displaystyle\int_a^\infty \frac{1}{x^s}dx = \frac{a^{1-s}}{s-1}$

(2) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x}dx = \frac{1}{\alpha}$ ($\alpha > 0$ のとき)
$\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ が収束して値が $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ であることもわかるが、これは上の積分ほど簡単ではない。
有界区間上の広義積分と同様に広義積分がいつ収束するか重要な判定条件がある。

Theorem 2 $f(x), g(x)$: $[a,+\infty)$ 上の関数で次の (1), (2), (3) をみたすとする。
(1) 任意の $a < c < \infty$ に対して $f(x), g(x)$ は $[a,c]$ 上の有界可積分関数である。
(2) すべての x について $|f(x)| \leq g(x)$.
(3) $\displaystyle\lim_{c\to\infty}\int_a^c g(x)dx$ がある値に収束する (すなわち、$g(x)$ は $[a,+\infty)$ で広義積分可能)。
このとき、$\lim_{c\to\infty}\int_a^c f(x)dx$ がある値に収束する (すなわち、$f(x)$ は $[a,+\infty)$ で広義積分可能).

この定理の系として、

Corollary 3 $a > 0$ とする。$f(x)$: $[a,+\infty)$ 上の関数で次の (1), (2) をみたすとする。
(1) 任意の $a < c < \infty$ に対して $f(x)$ は $[a,c]$ で有界かつ可積分。
(2) ある正数 C と $s > 1$ が存在して、任意の $x \geq a$ について $|f(x)| \leq \dfrac{C}{x^s}$.
このとき、$f(x)$ は $[a,+\infty)$ で広義積分可能。

Theorem 2 の証明のために、次の二つの補題を用いる。これらの補題を用いた定理の証明のアイデアは有界区間の場合と同じなので、省略する。各自で考えて欲しい。

Lemma 4 $F(x)$ を $[a,+\infty)$ 上の関数とする。次の (1) と (2) は同値である。
(1) $\lim_{x\to\infty} F(x)$ が収束する。
(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $R > 0$ が存在して $x_1, x_2 \geq R$ ならば $|F(x_1) - F(x_2)| \leq \varepsilon.$

Lemma 5 $f(x), g(x)$ が $[x_1, x_2]$ で可積分な関数ですべての $x \in [x_1, x_2]$ について $|f(x)| \leq g(x)$ とする。このとき

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \right| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|dx \leq \int_{x_1}^{x_2} g(x)dx.$$

以下の命題は Theorem 2 からすぐわかる。

Proposition 6 $f(x)$ を $[a, +\infty)$ 上の関数で $f(x), |f(x)|$ の両方とも任意の $a < c < \infty$ に対して $[a, c]$ 上で有界かつ可積分とする。このとき、$|f(x)|$ が $[a, +\infty)$ で広義積分可能ならば $f(x)$ も $[a, +\infty)$ で広義積分可能で

$$\left| \int_a^\infty f(x)dx \right| \leq \int_a^\infty |f(x)|dx.$$

Definition 7 (1) 上の命題 (Proposition 6) のように $f(x)$, $|f(x)|$ の両方とも広義積分可能の時 $f(x)$ の広義積分は絶対収束するという。
(2) $f(x)$ の広義積分は収束するが、$|f(x)|$ の広義積分は収束しないことがある。このとき、$f(x)$ の広義積分は条件収束するという。

例
(1) ガンマ関数

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx \qquad (s > 0).$$

$0 < s < 1$ のときは、関数 $e^{-x}x^{s-1}$ は $x = 0$ の近くで非有界だから有界区間での広義積分と無限区間での広義積分の二つの広義積分が含まれていることに注意してほしい。このときは、$a > 0$ とし

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_\varepsilon^a e^{-x} x^{s-1} dx, \qquad \lim_{R \to \infty} \int_a^R e^{-x} x^{s-1} dx \tag{1}$$

の両方が収束する時にこの極限の和と定義することにする。すなわち、

$$\lim_{\varepsilon \to 0, R \to \infty} \int_\varepsilon^R e^{-x} x^{s-1} dx \tag{2}$$

の極限と定義する。ε と R は無関係に取られている事に注意せよ。
$s > 0$ なら定数 $C > 0$ を十分大きく取ると

$$\begin{aligned} 0 < x < 1 \text{ のとき} \quad e^{-x}x^{s-1} &\leq x^{s-1} \\ x \geq 1 \text{ のとき} \quad e^{-x}x^{s-1} &\leq Ce^{-\frac{x}{2}} \end{aligned} \tag{3}$$

が成立するから (1) の二つの極限が収束し広義積分可能とわかる。
$\Gamma(n+1) = n!$ $(n = 0, 1, 2,)$ が帰納的に証明できる。したがって、$\Gamma(s+1)$ を $s!$ と書く事もある。
(2) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^\alpha} dx$ $(\alpha > 0)$. これは、十分大きな正数 C をとれば $x \geq 1$ のとき、$e^{-x^\alpha} \leq \frac{C}{x^2}$ となるから。
(3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ は条件収束するが絶対収束しない。この積分は Dirichlet(ディリクレ積分) とよばれる。