微積分法の基本定理

今回の講義の内容は

1. 先週し残した連続関数の可積分性の証明
2. 積分と微分が逆演算であることを示す微積分法の基本定理

である。

まず、原始関数、不定積分を定義する。

Definition 1 $f(x)$ をある区間 $[a,b]$ 上の関数とする。
(1) $[a,b]$ 上の微分可能な関数 $G(x)$ で $G'(x) = f(x)$ となる関数を原始関数 (*primitive function*) という。
(2) $f(x)$ が有界で $[a,b]$ で可積分とする。$[a,b]$ の点 c を取り、定まる関数

$$F_c(x) = \int_c^x f(t)dt \qquad x \in [a,b]$$

を $f(x)$ の不定積分 (*indefinite integral*) という。

不定積分 $F_c(x)$ に対して、$F_c'(x) = f(x)$ となることを期待したいところだが、一般的には成り立たない。$F_c(x)$ が微分可能ではないこともある。また、先週のプリントの関数 $f(x)$ $(1 \leq x \leq 2)$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{p} & x \text{ は有理数で } x = \frac{q}{p} \text{ のとき。ただし } p, q \text{ は互いに素な正整数} \\ 0 & x \text{ が無理数のとき} \end{cases} \tag{1}$$

については $F_c(x) = 0$ $(1 \leq x \leq 2)$ だから $F_c'(x) = 0 \neq f(x)$. したがって積分した関数を微分してももとには戻らない! しかし、$f(x)$ が連続関数ならば以下が成立する。

Theorem 2 (微積分法の基本定理) $f(x)$ を $[a,b]$ 上の連続関数とする。

(1) $F_c(x)$ は $[a,b]$ で微分可能で $F_c'(x) = f(x)$. すなわち、$f(x)$ の不定積分は原始関数である。
(2) $G(x)$ を $f(x)$ の原始関数とすると、$G(x) - F_c(x)$ は $[a,b]$ 上で定数である。
(3) $G(x)$ を $f(x)$ の原始関数とする。任意の α, β $(a \leq \alpha < \beta \leq b)$ について

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = G(\beta) - G(\alpha).$$

この定理を用いると、
積の微分法から部分積分の公式
合成関数の微分法から置換積分の公式
が出てくることがわかる。
微積分法の基本定理の (1) は次の定理を用いると証明できる。

Theorem 3 (積分の平均値の定理) $f(x)$ を $[a,b]$ 上の連続関数とする。α, β $(a \leq \alpha < \beta \leq b)$ に対して、ある $\gamma \in (\alpha, \beta)$ が存在して

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = f(\gamma)(\beta - \alpha).$$