リーマン積分の定義：Darbouxの上積分、下積分

Definition 1 (Darboux の上積分・下積分) $a < b$ となる二つの実数 a, b を取り、有界閉区間 $I = [a, b]$ を考える。
(1) 数列 $\{a_i\}_{i=0}^n$ が

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b \tag{1}$$

を満たすとき、I の分割と言う。分割は Δ で表すことにする。n は自然数であり、とくに $a_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$ のときは、I の n 等分の分割である。また、I の分割 $\Delta = \{a_i\}_{i=0}^n$ に対して $|\Delta| = \max_{1 \leq i \leq n}(a_i - a_{i-1})$ と書くことにする。
(2) $f(x)$ を I 上の有界関数とする。すなわちある数 $M > 0$ が存在して $|f(x)| \leq M$ $(\forall x \in I)$ とする。I の分割 $\Delta = \{a_0, \dots, a_n\}$ に対して

$$S(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n \sup\{f(x) \mid x \in [a_{i-1}, a_i]\}(a_i - a_{i-1}) \tag{2}$$

$$s(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n \inf\{f(x) \mid x \in [a_{i-1}, a_i]\}(a_i - a_{i-1}). \tag{3}$$

$S(f, \Delta)$ は *Darboux* (ダルブー) の過剰和, $s(f, \Delta)$ は *Darboux* の不足和と言う。
f の区間 I での上積分 $S(f)$, 下積分 $s(f)$ を

$$S(f) = \inf\{S(f, \Delta) \mid \Delta \text{ は } I \text{ のすべての分割を動く。}\} \tag{4}$$

$$s(f) = \sup\{S(f, \Delta) \mid \Delta \text{ は } I \text{ のすべての分割を動く。}\} \tag{5}$$

と定義する。$S(f) = s(f)$ のとき、$f(x)$ は I で積分可能と言う。この値を f の I での積分と言い、$\int_{[a,b]} f(x)dx$ (または $\int_a^b f(x)dx$) と書く。

$S(f), s(f)$ はそれぞれ、ある数の集合の下限、上限で定義されている。したがって、それらの集合が下に有界、上に有界で無ければならない。これは、

$$\inf_{x \in I} f(x)(b-a) \leq S(f, \Delta), \quad s(f, \Delta) \leq \sup_{x \in I} f(x)(b-a)$$

から分かる。$S(f, \Delta), s(f, \Delta)$ の基本的な性質をまとめる。その前に言葉を一つ用意する。

Definition 2 (1) $I = [a, b]$ の二つの分割 $\Delta = \{a_i\}_{i=0}^n, \Delta' = \{a'_i\}_{i=0}^m$ を考える。Δ' が Δ の細分であるとは Δ の分割点 $\{a_i\}_{i=0}^n$ が Δ' の分割点 $\{a'_i\}_{i=0}^m$ にすべて含まれているときに言う。
(2) I の二つの分割 $\Delta_1 = \{\alpha_i\}_{i=0}^n, \Delta_2 = \{\beta_i\}_{i=0}^m$ に対して二つの分点を合わせた集合 $\{\alpha_i\}_{i=0}^n \cup \{\beta_i\}_{i=0}^m$ を分割点とする分割を $\Delta_1 \curlyvee \Delta_2$ と書くことにする。$\Delta_1 \curlyvee \Delta_2$ は Δ_1, Δ_2 の細分である。

以下、特に断らない限り、$f(x)$ は有界な関数とする。

Proposition 3 (1) 任意の分割 Δ に対して

$$\inf_{x \in I} f(x)(b-a) \leq s(f, \Delta) \leq S(f, \Delta) \leq \sup_{x \in I} f(x)(b-a).$$

(2) Δ' が Δ の細分とすると

$$s(f,\Delta) \le s(f,\Delta'), \quad S(f\Delta') \le S(f,\Delta).$$

(3) 任意の分割 Δ_1, Δ_2 に対して、

$$s(f,\Delta_1) \le S(f,\Delta_2).$$

(4) 任意の f に対して $s(f) \le S(f)$.
(5) 有界関数 $f(x)$ が与えられたとすると適当な分割の列 Δ_n で次の性質を満たすものがある。
(i) $\lim_{n\to\infty} |\Delta_n| = 0$.
(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S(f,\Delta_n) = S(f), \lim_{n\to\infty} s(f,\Delta_n) = s(f)$

例 $f(x) = x$ $I = [0,R]$ のとき、$f(x)$ は積分可能で、$\int_0^1 x dx = \frac{R^2}{2}$. これは、上の定義を次の順番でチェックして示される。
(i) $|S(f,\Delta) - s(f,\Delta)| \le |\Delta|$ (ii) $\dfrac{S(f,\Delta)+s(f,\Delta)}{2} = \dfrac{R^2}{2}$.
(i), (ii) から

$$\frac{R^2}{2} - \frac{|\Delta|}{2} \le s(f,\Delta) \le S(f,\Delta) \le \frac{R^2}{2} + \frac{|\Delta|}{2}. \tag{6}$$

Δ_n という分割を $|\Delta_n| \to 0$ かつ $\lim_{n\to\infty} S(f,\Delta_n) = S(f), \lim_{n\to\infty} s(f,\Delta_n) = s(f)$ をみたす分割に対して (6) を適用すれば証明は終る。

実は Darboux により次が示されている。

Theorem 4 $\lim_{n\to\infty} |\Delta_n| = 0$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S(f,\Delta_n) = S(f), \lim_{n\to\infty} s(f,\Delta_n) = s(f)$.

これから

Corollary 5 次の (1), (2) は同値である。
(1) $f(x)$ は I 上可積分である。
(2) $\lim_{n\to\infty} |\Delta_n| = 0$ となる分割の列で $\lim_{n\to\infty}(S(f,\Delta_n) - s(f,\Delta_n)) = 0$ となるものが存在する。

この講義では Darboux による上積分、下積分を用いて積分を定義したが、これは次の定義とも同値になる。

Definition 6 $f(x)$ を $I = [a,b]$ 上の有界関数とする。$\Delta = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ を I の分割とする。更に点列 $\{\xi_i\}_i = 0^{n-1}$ を $a_{i-1} \le \xi_{i-1} \le a_i$ $(1 \le i \le n)$ をみたすようにとる。

$$I(f,\{\xi_i\},\Delta) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_{i-1})(a_i - a_{i-1}) \tag{7}$$

と書き、$f(x)$ のリーマン和と呼ぶ。$|\Delta| \to 0$ のとき、$\{\xi_i\}$ の取り方によらず $I(f,\xi_i,\Delta)$ が一定の値に収束するとき $f(x)$ は I で可積分であるといい、極限値を $\int_a^b f(x)dx$ と書く。

Remark 7

$$s(f,\Delta) \le I(f,\{\xi_i\},\Delta) \le S(f,\Delta)$$

が常に成り立つ。