数列の極限・関数の極限について

1　数列の極限

1.1　$\varepsilon - N$ 論法に対する解説

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \tag{1}$$

の正確な定義は

$$\begin{aligned} &\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}, \\ &\forall n \geq N \text{ に対して} \qquad |a_n - \alpha| \leq \varepsilon. \end{aligned} \tag{2}$$

この式の真の意味は

「まず何か正の数 ε が与えられたとする。するとその ε に応じて、適当に大きい整数 N をとると, N 以上のすべての n に対して、

$$|a_n - \alpha| \leq \varepsilon \tag{3}$$

が成り立つ。」

である。このようにいつも書くと長くてたいへんなので、上のように簡単に書くのである。

(注)

1. N は ε に応じていろいろ変わる数である。だからその依存性をはっきりと表すために $N(\varepsilon)$ と書くこともある。また N の取り方はもちろん一通りではない。
2. ε は小さい数, N は大きい数を考えるのが普通だが ε としては大きい数を考えても別に構わない。ただそのときは $N = 1$ で, すなわちすべての n で式 $|a_n - \alpha| \leq \varepsilon$ が成立してしまうかも知れない。
3. $\varepsilon - N$ 論法のポイントは (1) の n がどんどん大きくなるとき限りなく a_n が α に近付くという動的な表現を ε と N のように二つの数を導入して表現していることにある。

例題 1 $a \in \mathbb{R}$ とする。$\lim_{n\to\infty} \frac{a}{n} = 0$ を示せ。

[解] アルキメデスの公理を用いて示そう。$a_n = \frac{a}{n}$ とする。ε を正数とする。

$$\text{「}n \geq N \text{ ならば } |a_n| \leq \varepsilon \text{ となる」} \tag{4}$$

が成立するような N を求めよう。そのため

$$|a_n| = \frac{a}{n} \leq \varepsilon \tag{5}$$

となる式を見る。これは $n\varepsilon \geq |a|$ と同値である。アルキメデスの公理よりある自然数 N で $N\varepsilon \geq |a|$ が成立することがわかる。$n \geq N$ ならば $n\varepsilon \geq N\varepsilon \geq |a|$ となるから (この不等式の性質については下の**注**を参照) (4) が成立する。したがって $\lim_{n\to\infty} \frac{a}{n} = 0$ が証明できた。■

注 この講義では有理数の集合からある方法で実数全体の集合が構成されると述べ、その作り方には立ち入ってはいない。また、講義の中ではっきりとは言ってきていなかったがそうやって作られた実数が $a+b=b+a, a(b+c)=ab+ac, ab=ba, a(bc)=(ab)c$ 等の交換法則、結合法則などが成立すること、$a \geq 0, b \geq c$ ならば $ab \geq ac$ が成立、$a \geq b, c \geq d$ ならば $a+c \geq b+d$ が成立するなど我々がよく使っている不等式の性質も成立することを証明する必要があるのだが、これらのことも認めて話を進めている。

例題 2 $a_n = \frac{n+1}{2n+1}$ のとき、$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$ となるが、次の問いに答えよ。

(1) ε を正数とする。$|a_n - \frac{1}{2}| \leq \varepsilon$ をみたす n を求めよ。

(2) $\varepsilon = \frac{1}{20}, \frac{1}{100}, \frac{1}{200}$ のとき 1 ページの (2) 式が成立するような N の最小値を求めよ。

次に

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty. \tag{6}$$

の定義を考えよう。

$\varepsilon - N$ 論法ならぬ $R - N$ 論法での定式化は

$$\begin{aligned} &\forall R > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \\ &\forall n \geq N \text{ に対して} \qquad a_n \geq R, \end{aligned} \tag{7}$$

となる。

この式の意味を普通の文章で書くと

「まず何か正の数 R が与えられたとする。するとその R に応じて、適当に大きい整数 N をとると, N 以上のすべての n に対して、

$$a_n \geq R$$

が成り立つ。」$\cdots\cdots\cdots\cdots$ (9) である。

例えば $a_n = n$ のとき $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ であるが、(9) は R に対して R より大きな整数 N をひとつとれば成立することがチェックできる。

1.2 命題と論理記号

命題 「このクラスの学生は全員携帯電話をもっている。」

の否定は

「このクラスには少なくとも一人は携帯電話を持っていない学生がいる」

である。

では次の状況を考えよう。あるクラスの先生が学生の成績について話しをしているとする。ただし教科が 10 教科あり、これまでおのおのの教科について 50 回試験が行われている。試験は 100 点満点とする。

次の命題を考える。

命題 「このクラスのどの学生もこれまで 50 回の試験ですべて 100 点をとった教科を少なくとも一つもっている。」

これを言いかえると

命題 「任意の学生に対して、その学生に応じてある教科が存在してその教科のテストすべてで 100 点をとっている。」

となる。

この命題の否定は

「ある学生が存在して、どの教科に対しても、過去 50 回のうち少なくとも 1 回は 100 点をとっていない。」

となる。

さてここで

命題 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, すなわち

「任意の正の数 ε に対して、大きい整数 $N(\varepsilon)$ をとると, $N(\varepsilon)$ 以上のすべての n に対して、

$$|a_n - \alpha| \le \varepsilon$$

が成り立つ。」$\cdots\cdots\cdots\cdots$ (10) の否定を考えよう。

上の例と同じに考えれば、否定 ($\lim_{n\to\infty} a_n \ne \alpha$ ということ) は

「ある正数 ε が存在して任意の整数 N に対して $n \ge N$ となる n が存在して

$$|a_n - \alpha| > \varepsilon$$

となる。」$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (11)

これは

「適当に正の数 ε をとれば無限に多くの n に対して $|a_n - \alpha| \ge \varepsilon$ が成立する」$\cdots$ (12)

と同じことである。(うるさく言うと (12) の無限に多くのと言うのを (11) では $\forall N, \exists n \ge N$ と正確に言っている) ここまで来れば直感的にも $\lim_{n\to\infty} a_n \ne \alpha$ に近いとわかると思う。

例題 3. $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ は収束しないことを示せ。

注 (1) $\alpha \in \mathbb{R}$ をとる。$\lim_{n\to\infty}(-1)^n \ne \alpha$ を $\alpha \ge 0$, $\alpha < 0$ で場合分けして示す。

(2) 数列 $\{a_n\}$ がある実数に収束するための必要十分条件は $\lim_{n,m\to\infty} |a_n - a_m| = 0$ である (Cauchy の判定条件)。すなわち「任意の $\varepsilon > 0$ に対してある N が存在して $n \ge N, m \ge N$ をみたすすべての自然数 n, m について $|a_n - a_m| \le \varepsilon$ となる」ことである。これの否定命題は「ある $\varepsilon > 0$ が存在してどんな N をとっても $n \ge N, m \ge N$ をみたす n, m が存在して $|a_n - a_m| \ge \varepsilon$ となる」となる。この命題を示してもよい。上の問題の数列の場合 ε は何に取ればよいか?

上の携帯電話、テスト、ε-N 論法の例の命題はいずれも

「$\forall a$, $\exists b$, b で定まるある集合 $S(b)$ に属する全ての n に対して $P(n,a)$ が成立する。」
の形をしていて
その否定が
「$\exists a$, $\forall b$, b で定まるある集合 $S(b)$ に属するある n に対して $P(n,a)$ が成立しない。」
になっている。$P(n,a)$ は n,a に依存する命題である。$\forall,\exists$ で命題 $P(n,a)$ の n,a の動く範囲を限定しているから、$\forall,\exists$ を限定記号という。ではつぎの問題を考えよう。

例題 4　次の命題の否定を述べよ。
「うちのどの雄猫も町内にガールフレンドの雌猫がいてそのうちの一匹との間のある子猫には斑 (ぶち) がある」
注：うちには雄猫が何匹かいる。そのガールフレンドも一匹とは限らないし、子猫も何匹かいる状況を考えている。

2　関数の極限について

2.1　ε-δ 論法は極限の話を不等式の話に変える

$x = a$ の近くで定義された関数 $y = f(x)$ を考える。$f(x)$ は $x = a$ では定義されていなくてもよい。

$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$

とは ε-δ 論法を用いて定式化する (Cauchy, Weierstrass による) と

(1)

勝手に与えられた正数 ε に対して、ある正数 δ が存在して $0 < \lvert x-a\rvert \le \delta$ をみたす元 x について $\lvert f(x)-A\rvert \le \varepsilon$ となる。

δ は ε に応じて変わるし、いろいろな取り方がある。ε が小さくなればなるほど δ を小さくしなければならないだろう。このことを下の問 1 で確かめることにする。また、a が $f(x)$ の定義域に入っていて $f(a) \neq A$ でも構わないことに注意してほしい。

問 1.　次に従い $\lim_{x\to 1} x^2 = 1$ を示せ。
(1)　$|x-1| \le 1$ のとき $|x^2-1| \le 3|x-1|$ となることを示せ。
(2) $\varepsilon > 0$ がまず与えられたとする。

$$|x-1| \le \delta \text{ならば} |x^2-1| \le \varepsilon$$

が成立するような δ を ϵ を用いて求めよ。

(注) **1.** δ はいろいろな取り方がある。

2. x が a に右側から (大きい方から) 近付くとき $f(x)$ がある数 A に収束するときがある。これを

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = A$$

と書き、$f(x)$ の $x = a$ での右側極限値 (または、右からの極限値) という。

正確にいうと、

「勝手に与えられた正数 ε に対して、ある正数 δ が存在して $a < x < a + \delta$ をみたす元 x について $|f(x) - A| \leq \varepsilon$ となる。」

ということ。

3. 2. を逆にして左側極限値が定義できる。x が a に左側から (小さい方から) 近付くとき $f(x)$ がある数 B に収束するときがある。これを

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = B$$

と書き、$f(x)$ の $x = a$ での左側極限値 (または、左からの極限値) という。

正確にいうと、

「勝手に与えられた正数 ε に対して、ある正数 δ が存在して $a - \delta < x < a$ をみたす元 x について $|f(x) - B| \leq \varepsilon$ となる。」ということ。

$\lim_{x \to a} f(x) = A$ とは、$\lim_{x \to a+0} f(x) = A$ かつ $\lim_{x \to a-0} f(x) = A$ となることと同値である。

関数 $y = f(x)$ が $x = a$ で連続とは $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ のときにいう。すなわち

(2)

> 勝手に与えられた正数 ε に対して、ある正数 δ が存在して
> $|x - a| \leq \delta$ をみたすすべての定義域の元 x について
> $|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$ となる。

(2) では (1) とちがい $0 < |x - a|$ の条件がないが、この条件がなくてもよいのは明らかであろう。

$y = f(x)$ の定義域の各点で $f(x)$ が連続のとき、$y = f(x)$ は連続であるという。

(2) を $\forall, \exists$ などの記号を使って書き直すと

(3)

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ such that}$$
$$\forall x \in I \cap \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| \leq \delta\} \Longrightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

ただし、I は $f(x)$ の定義域である。また、関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続でないということは命題 (2),(3) の否定を考えることにより、

(4)

> ある正数 ε が存在して、どのように正数 δ をとっても
> $|x - a| \leq \delta$ をみたす I の元 x で
> $|f(x) - f(a)| > \varepsilon$ となるものが存在する。

(注) 連続的に変わるということをもうすこし現実的な問題で考えてみよう。射撃 (やボール投げ) で例えると ε-δ 論法の ε は的の大きさ, δ はどの程度手がぶれても平気かを表す誤差の許容範囲を表していると言える。もちろんぶれとは銃 (あるいは大砲など) の筒先を的の真中に当てるための正しい方向からどれだけずれているかを表している。

もうすこし具体的に考えよう。平面上の点 O に大砲があり質量 1 の弾を角度 θ の方向に初速 v で打ち出す。弾の位置は打ち出した方向 (x 座標とする) の座標と高さ (y 座標とする) で表示される。このとき Newton の運動方程式を解くと弾が地面にぶつかるまでは次の式に従うことがわかる。ちなみに今年の阪大の前期試験の入試問題の 4 番で出て来ている式はこの式の特別な場合である。

$$\begin{aligned} x(t) &= v\cos\theta t \\ y(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + vt\sin\theta \end{aligned}$$

この式から落下地点の x 座標は $X = \frac{v^2\sin 2\theta}{g}$ となる。この式を見ると明らかなことだが, 落下地点 X は θ, v に連続に依存して変わることになる。もちろんボール投げの経験上 X が角度, 初速の連続関数だというのは知っているわけだがここで上の $\varepsilon - \delta$ 論法が何を述べているかを考えてみよう。初速を固定し X を角度 θ の関数と考える。$X(\theta_0) = L$ とする。このとき, L が中心であるような的を考えてやるとその的がどんなに小さいものにしても角度 θ が θ_0 からそんなにずれていなければ弾はその的に当たるであろう。それがボール投げで角度の大きさに関して落下地点が連続的に動くということである。

もし、角度のずれが θ_0 からそんなにずれていないのに地点 L からずれることが起きるならば不連続ということになるがこのようなことはボール投げでは起こらない。

2.2 ε-δ 論法, ε-N 論法が必要になる理由

(解析学 A, B の範囲外の話題も含んでいる)

これまで極限の厳密な定義を学んできたが、なぜこのようなややこしいことが必要になるのかを説明しよう。

1. 例えば微分は $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ は無限小の二つの量 dx, dy の比などと直感的に説明されたりするなど定義が曖昧である。

2. 通常我々は、連続な関数のグラフを手で書くと、ある区間では単調に増加し、ある区間では単調に減少するという図形を書く。しかし、連続だがすべての点で微分不可能な関数が存在するなど想像しがたい関数などもあるということ。

などがある。(しかし、興味深いことにすでに微積分法の発見者ニュートンやライプニッツもすでに ε-N 論法, ε-δ 論法に近い考え方を持っていたらしい。)

ここでは第 3 の理由

3. 極限が二つ以上絡んで来ると限りなく流の定義では不十分なことがある

を説明しよう。そのため、次の問題を考える。

(5)

> $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ を $[0,1]$ の上で定義された関数の列とする。
> 各 $f_n(x)$ は $[0,1]$ で連続とする。
> 今、各 $x \in [0,1]$ について極限 $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在するとする。
> その極限は各 x に依存するので、$f(x)$ と書くことにする。
> では、関数 $f(x)$ は $[0,1]$ 上の連続関数になるだろうか?

答えは「Yes のときもあるし NO のときもある」である。ε-N 論法など極限の概念の厳密な定義に貢献した Cauchy(1821) ですら、上の問は Yes と思っていたらしく、Abel の反例 (1826) に関して頭を悩ませていたという。

$f(x)$ が $x=a$ で連続とは

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

ということだから、$f_n(x)$ が連続関数であることに注意すると

$$\lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x)$$

という "二つの極限" の順序交換ができるということと同じである。しかし、一般的にはこのようなことはできないのである。このような「極限の順序交換」は実際上の計算でも理論上でもいろいろな場面 (たとえば「微分方程式の解の存在証明」など) で出て来るものである。この交換がいつできるかを論じるためには、極限や連続性の概念を「限りなく流」では不十分で、「ε-δ 論法」などのきちんとした定義が必要になるのである。(4) の問題はその後、Weierstrass による関数の一様収束という概念 (1841) を生み出すことになる。(解析学 A, B ではこの問題は扱わない。)

問 2.

次のときに $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ。ただし $x \in [0,1]$ とする。$f(x)$ が連続なのはどちらか?

(1)

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}.$$

(2)

$$f_n(x) = \frac{n}{n+x}.$$