$\varepsilon - N$ 論法に対する解説

§ 1

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \tag{1}$$

の正確な定義は

$$\begin{aligned} &\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}, \\ &\forall n \geq N \text{ に対して} \qquad |a_n - \alpha| \leq \varepsilon. \end{aligned} \tag{2}$$

この式の真の意味は

「まず何か正の数 ε が与えられたとする。するとその ε に応じて、適当に大きい整数 N をとると, N 以上のすべての n に対して、

$$|a_n - \alpha| \leq \varepsilon \tag{3}$$

が成り立つ。」

である。このようにいつも書くと長くてたいへんなので、上のように簡単に書くのである。

(注)

1. N は ε に応じていろいろ変わる数である。だからその依存性をはっきりと表すために $N(\varepsilon)$ と書くこともある。また N の取り方はもちろん一通りではない。
2. ε は小さい数, N は大きい数を考えるのが普通だが ε としては大きい数を考えても別に構わない。ただそのときは $N = 1$ で, すなわちすべての n で式 $|a_n - \alpha| \leq \varepsilon$ が成立してしまうかも知れない。
3. $\varepsilon - N$ 論法のポイントは (1) の n がどんどん大きくなるとき限りなく a_n が α に近付くという動的な表現を ε と N のように二つの数を導入して表現していることにある。

例題 1 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ を示せ。

[解] $a_n = \frac{1}{n}$ とする。ε を正数とする。

$$\text{「}n \geq N \text{ ならば } |a_n| \leq \varepsilon \text{ となる」} \tag{4}$$

が成立するような N を求めよう。そのため

$$|a_n| = \frac{1}{n} \leq \varepsilon \tag{5}$$

を解くと $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$. ゆえに、

$$N := \frac{1}{\varepsilon} \text{ より大きな整数} \tag{6}$$

とおけば (4) が成立する。したがって $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ が証明できた。■

例題 2 $a_n = \frac{n+1}{2n+1}$ のとき、$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$ となるが、次の問いに答えよ。

(1)　ε を正数とする。$|a_n - \frac{1}{2}| \le \varepsilon$ をみたす n を求めよ。

(2)　$\varepsilon = \frac{1}{20}, \frac{1}{100}, \frac{1}{200}$ のとき 1 ページの (2) 式が成立するような N の最小値を求めよ。

§2.　次に

$$\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty. \tag{7}$$

の定義を考えよう。

$\varepsilon - N$ 論法ならぬ $R - N$ 論法での定式化は

$$\begin{aligned} &\forall R > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}, \\ &\forall n \ge N \text{ に対して} \qquad a_n \ge R, \end{aligned} \tag{8}$$

となる。

この式の意味を普通の文章で書くと

「まず何か正の数 R が与えられたとする。するとその R に応じて、適当に大きい整数 N をとると, N 以上のすべての n に対して、

$$a_n \ge R$$

が成り立つ。」$\cdots\cdots\cdots\cdots$ (9) である。

例えば $a_n = n$ のとき $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ であるが、(9) は R に対して R より大きな整数 N をひとつとれば成立することがチェックできる。

§3. 命題と論理記号

命題 「このクラスの学生は全員携帯電話をもっている。」

の否定は

「このクラスには少なくとも一人は携帯電話を持っていない学生がいる」

である。

では次の状況を考えよう。あるクラスの先生が学生の成績について話しをしているとする。ただし教科が 10 教科あり、これまでおのおのの教科について 50 回試験が行われている。試験は 100 点満点とする。

次の命題を考える。

命題 「このクラスのどの学生もこれまで 50 回の試験ですべて 100 点をとった教科を少なくとも一つもっている。」

これを言いかえると

命題 「任意の学生に対して、その学生に応じてある教科が存在してその教科のテストすべてで 100 点をとっている。」

となる。

この命題の否定は

「ある学生が存在して、どの教科に対しても、過去 50 回のうち少なくとも 1 回は 100 点をとっていない。」

となる。

さてここで

命題 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, すなわち

「任意の正の数 ε に対して、大きい整数 $N(\varepsilon)$ をとると, $N(\varepsilon)$ 以上のすべての n に対して、

$$|a_n - \alpha| \leq \varepsilon$$

が成り立つ。」$\cdots\cdots\cdots\cdots$(10) の否定を考えよう。

上の例と同じに考えれば、否定 ($\lim_{n\to\infty} a_n \neq \alpha$ ということ) は

「ある正数 ε が存在して任意の整数 N に対して $n \geq N$ となる n が存在して

$$|a_n - \alpha| > \varepsilon$$

となる。」$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(11)

これは

「適当に正の数 ε をとれば無限に多くの n に対して $|a_n - \alpha| \geq \varepsilon$ が成立する」$\cdots$(12)

と同じことである。(うるさく言うと (12) の無限に多くのと言うのを (11) では $\forall N, \exists n \geq N$ と正確に言っている) ここまで来れば直感的にも $\lim_{n\to\infty} a_n \neq \alpha$ に近いとわかると思う。

例題 3. $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ は収束しないことを示せ。

ヒント：$\alpha \in \mathbb{R}$ をとる。$\lim_{n\to\infty}(-1)^n \neq \alpha$ を $\alpha \geq 0$, $\alpha < 0$ で場合分けして示す。

上の二つの例ではいずれも

「$\forall a$, $\exists b$, b で定まるある集合 $S(b)$ に属する全ての n に対して $P(n, a)$ が成立する。」

の形をしていて

その否定が

「$\exists a$, $\forall b$, b で定まるある集合 $S(b)$ に属するある n に対して $P(n, a)$ が成立しない。」

になっている。$P(n, a)$ は n, a に依存する命題である。$\forall, \exists$ で命題 $P(n, a)$ の n, a の動く範囲を限定しているから、$\forall, \exists$ を限定記号という。ではつぎの問題を考えよう。

例題 4 次の命題の否定を述べよ。

「うちのどの雄猫も町内にガールフレンドがいてそのうちの一匹との間のある子猫には斑 (ぶち) がある」

注：うちには雄猫が何匹かいる。そのガールフレンドも一匹とは限らないし、子猫も何匹かいる状況を考えている。