真性スカラー平坦４次元閉多様体

二木昭人
東京工業大学理工学研究科

June 30, 2003

1 定義と問題設定

多様体上のリーマン計量 g に対し，そのスカラー曲率を s_g により表そう．もちろん s_g は多様体上の関数である．s_g が恒等的に 0 であるようなリーマン計量を**スカラー平坦計量**と呼ぶ.

多様体の全体が次の３つに分類されることは自明である（[12]).

(P) $s_g > 0$ となるリーマン計量 g を持つ多様体.
(Z) $s_g > 0$ となるリーマン計量 g は持たないが，$s_g \geq 0$ となるリーマン計量 g を持つ多様体.
(N) $s_g \geq 0$ となるリーマン計量 g は持たない多様体,

２次元向き付け可能多様体の場合，(P) の属するものは球面，(Z) はトーラス，(N) は種数 2 以上の曲面からなる．

以下，多様体はすべて，コンパクト，向き付け可能で，次元は 3 以上とする．まず，(Z) に属する多様体上の非負スカラー曲率計量は実際スカラー平坦計量である．なぜなら Kazdan-Warner の定理 [8] により，$s_g \geq 0$ かつ少なくとも１点 p で $s_g(p) > 0$ であるならば，別のリーマン計量 $\widetilde{g}$ で $s_{\widetilde{g}} > 0$ となるものが存在するからである．そこで次の定義をする．

定義 1.1.
(P) に属する多様体を**正スカラー曲率多様体**と呼ぶ.
(Z) に属するコンパクト多様体を**真性スカラー平坦多様体**（*strictly scalar-flat manifold*），または**強スカラー平坦多様体**（*strongly scalar-flat manifold)* と

呼ぶ.
(N) に属するコンパクト多様体を**真性負スカラー曲率多様体**（*strictly negative scalar curvature manifold*），または**強負スカラー曲率多様体**（*strongly negative scalar curvature manifold)* と呼ぶ.

注意 1.2. さらに，*Bourguignon* の結果（*[2]*）によれば *(Z)* に属するスカラー平坦計量は，実際にはリッチ曲率 *0* の計量（**リッチ平坦計量**）である.

注意 1.3. 任意のコンパクト多様体は $s_g < 0$ なるリーマン計量を持つ（*Kazdan-Warner* の定理）．さらに，このことと山辺の問題の解決（*Aubin-Schoen)* を組み合わせると *(P)* に属する多様体はスカラー平坦計量を持つことがわかる．従って，結局 *(P)* に属する多様体は正，0，負のいずれの符号の定スカラー曲率計量も持ち，*(Z)* に属する多様体は 0 または負の定スカラー曲率計量を持ち，*(N)* に属する多様体は負の定スカラー曲率計量を持つ．上の定義で単にスカラー平坦多様体と呼ばず，真性スカラー平坦多様体と呼んだ理由はこのことから来る．また，同じ理由で *(N)* に属する多様体を真性負スカラー曲率多様体と呼ぶのは自然であろう.

問題 ： (P) ，(N)，(Z) に属する多様体を決定せよ.

2 5 次元以上の場合

どういう表現の仕方をすれば決定したことになるのか問題であるが,（微分）位相不変量や複素幾何などのなじみのある言葉の範囲で表現できれば決定したことになる，ということにしよう（この言い方自体曖昧であるが）．その了解のもとに，この問題の答えは 5 次元以上の単連結コンパクト多様体に対しては解決済みである．答えは次の通りである.

定理 2.1. *(Gromov-Lawson-Stolz ([7], [14]) 5* 次元以上の単連結コンパクト多様体 M が正のスカラー曲率計量を持つための必要十分条件は，M は *non-spin* か，または *spin* かつ $\alpha(M) = 0$ をみたすことである.

$\alpha(M) \in KO^{-*}(pt)$ というのは $\hat{A}$-種数 $\hat{A}(M)$ を拡張した不変量で，スピン多様体 M に対しディラク作用素を用いて定義されるものである（[9] 参照）．

この定理を使うと (Z) に属するコンパクト単連結多様体が決定される．

まずこの定理から (Z) および (N) に属する多様体は Spin かつ $\alpha(M) \neq 0$ である．よって，特に (Z) に属する多様体では Lichnerowicz formula から parallel spinor を持つ．よってスピン束のホロノミー群は $Spin(n)$ より小さくなり，従ってリーマン多様体のホロノミーも $SO(n)$ より小さくなる．よってベルジェ・サイモンスの定理（[1], [5] など参照）により holonomy は reduce するので，de Rham 分解の意味で既約なものだけを考えることにして，対称空間か，または

$$U(n/2),\ SU(n/2),\ Sp(n/4)\cdot Sp(1),\ Sp(n/4),\ Spin(7),\ G_2$$

のいずれかのホロノミーになる．

次に，(Z) に属する多様体は Ricci-flat である．（この証明は２通りある．一つは Bourguignon の結果を使う方法：もし Ricci-flat でないならスカラー平坦計量は正スカラー曲率計量に変形できる．

もう一つは Ousama Hijiazi の議論を使う方法： parallel spinor を持てば Ricci-flat である．Hijazi の議論は単純なテンソル計算から得られる（[6] 参照）．）

そこで，　上の候補の中から Ricci-flat という条件に適するものを選び出す．既約対称空間は Einstein で Ricci-flat でないので除外される．$U(n/2)$ ということはケーラーであるが， Ricci-flat Kahler なら $SU(n/2)$ になるので， (full に) $U(n/2)$ となるホロノミーは除外され， $SU(n/2)$ はとりあえず残る． $Sp(n/4)\cdot Sp(1)$ は Einstein だが not Ricci-flat だから除外，$Sp(n/4)$ は hyperKähler で Ricci-flat だから残る． $Spin(7)$，G_2 は Ricci-flat だから残る．

結局，$SU(n/2)$， $Sp(n/4)$，$Spin(7)$，G_2 が残り，　これらの直積が候補となる．次に $\alpha(M) \neq 0$ なるものを選び出さなければならない．$KO^{-*}(pt)$ は Bott 周期性に従い　mod 8 で $1 \sim 8$ の次元で $Z_2,\ Z_2,\ 0,\ Z,\ 0,\ 0,\ 0,\ Z$ であるので，$SU(3); n = 6,\ SU(7); n = 17,\ ....,\ G_2; n = 7$ は $\alpha(M) = 0$ となり除外される．　実 $8k$ 次元では $\alpha(M) = \hat{A}(M)$，$8k+4$ 次元の場合 $\alpha(M) = \hat{A}(M)/2$ で，　どちらの場合も $SU(n/2)$ ホロノミーでは $\hat{A}(M) = 2$ であるので，これらは真性スカラー平坦である．$Sp(n/4)$ も $\hat{A} = n/4+1$ で真性スカラー平坦である．また 8 次元多様体の例外ホロノミー $Spin(7)$-多様体においても $\hat{A}(M) = 1$ であることが容易にわかる．興味深いのは $SU(5); n = 10$ で torsion になるが，この場合 $\alpha(M) = 1 \mod 2$ となり（∵ Lawson-Michaelsohn[9]， p.147, 式（7.32) と Ricci-flat Kähler ではディラク

作用素 ＝ スピン^c ディラク $= \bar{\partial} + \bar{\partial}^*$ より），これは真性スカラー平坦である．

ところが $SU(5)$ 多様体 $\times SU(10)$ 多様体は 30 次元で $30 \equiv 6 \mod 8$ であるのでこれは (P) に属する． この例が示すように 真性スカラー平坦を二つ直積しても (P) になることがある．

従って,『(Z) は $S(n/2)$ ホロノミーと $Sp(n/4)$ ホロノミーと $Spin(7)$ ホロノミーのいくつかの直積で $\alpha(M) \neq 0$ なるものからなる』というのが正しい言い方である（[6]）．

以上の考察から (P) と (Z) がわかったので，(N) はそれ以外のものという意味でわかったことになる．

さて，上の定理は余次元 3 以上の手術により正のスカラー曲率を持つという性質は不変であるということと，h コボルディズム定理の証明の議論と同じ議論を用いることによって証明される．定理のなかの単連結という仮定は h コボルディズム定理が単連結でないと成り立たないことと同じ理由である．

3　４次元の場合

４次元の場合 h コボルディズム定理は成立しないことがドナルドソン理論（[3]）からわかっている．一方，ドナルドソン理論と密接な関係にあるサイバーグ・ウィッテン不変量は正のスカラー曲率を持つための障害である（[15], [4], [11], [5]）．ドナルドソン不変量にせよ，サイバーグ・ウィッテン不変量にせよ，位相同型であっても微分同相でない可微分多様体を見分ける不変量であるから，４次元の場合の位相不変量 $\alpha(M) = \hat{A}(M)/2$ とは性質がことなり，正スカラー曲率計量を持つという性質は位相不変なだけではなく，微分構造にも依存することは明かである．実際，$\mathbb{CP}^3$ の次数の十分高い奇数次超曲面 X_1 は non-spin であるが，$b^+ \geq 3$ でありサイバーグ・ウィッテン不変量が 0 ではないので正のスカラー曲率計量は持たない．しかも X_1 は，いくつかの $\mathbb{CP}^2$ といくつかの $\overline{\mathbb{CP}^2}$ の連結和 X_2 と位相同型である．そしてもちろん X_2 は正スカラー曲率計量を持つ．

この例が示すように，４次元では Gromov-Lawson-Stolz の定理のように,「non-spin または spin かつ $\hat{A}(M) = 0$ なら正スカラー曲率計量を持つ」 とは限らず,「サイバーグ・ウィッテン不変量が消える」ことも実際必要である．仮にこの２つの条件が十分でもあったとしよう．すると (Z) に属する多様体 M はサイバーグ・ウィッテン不変量が零でないことから，M はケーラーになる（Witten [15]). さらに，単連結コンパクトケーラー曲面で (Z) に属するものは K3 曲面に限る（LeBrun [10])．従って次のことが正しいかどうかが

興味が持たれる．

問題　４次元単連結閉多様体が (Z) に属するならばそれは K3 曲面と微分同相か？

References

[1] A. Besse, Einstein manifolds, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-Tokyo, 1987.

[2] J.P. Bourguignon, Une stratification de l'espace des structures riemanniennes. Compositio Math., 30(1975), 1–45.

[3] S.K. Donaldson and P.B. Kronheimer, Geometry of four manifolds, Clarendon, Oxford, 1990.

[4] 古田幹雄，数学から見た場の理論，Donaldson 理論と Seiberg-Witten 理論，別冊・数理科学，現代物理と現代幾何，２００２．

[5] 二木昭人，微分幾何講義，別冊・数理科学，サイエンス社，２００３．

[6] A. Futaki, Scalar-flat closed manifolds not admitting positive scalar curvature metrics, Invent. Math., 112(1993), 23-29.

[7] M.Gromov and H.B.Lawson: The classification of simply connected manifolds of positive scalar curvature, Ann. of Math. **111** (1980), 423–434

[8] J.L.Kazdan and F.W.Warner: Scalar curvature and conformal deformation of Riemannian structure, Journ. Diff. Geom. **10**(1975), 113–134.

[9] H.B.Lawson and M.L.Michelsohn, Spin Geometry, Princeton University Press, 1989.

[10] C. LeBrun, Kodaira dimension and the Yamabe problem, Comm. Anal. Geom., 7(1999), 133–156.

[11] J.W. モーガン，サイバーグ・ウィッテン理論とトポロジー，１９９８，（二木昭人訳），（原書 J.W. Morgan: The Seiberg-Witten equations and applications to the topology of smooth four-manifolds, Princeton Univ. Press, 1996）．

[12] J. Rosenberg and S. Stolz, Manifolds of positive scalar curvature, Algebraic Topology and its Applications (G. Carlsson, R. Cohen, W.-C. Hsiang, and J. D. S. Jones, eds.), M. S. R. I. Publications, vol. 27, Springer, New York, 1994, pp. 241–267.

[13] R. Schoen and S.-T. Yau, On the structure of manifolds with positive scalar curvature, Manuscripta Math. 28 (1979), 159–183.

[14] S.Stolz: Simply connected manifolds of positive scalar curvature, Annals of Math. 136 (1992), 511–549.

[15] E. Witten, Monopoles and four-manifolds, Math. Res. Lett., 1(1994), 809–822.