KÄHLER-EINSTEIN 計量と K-安定性

二木 昭人

Abstract. この講演では，Kähler-Einstein 計量の存在問題と K 安定性と呼ばれる一種の GIT 安定性の同値性についての予想（Yau-Tian-Donaldson 予想）に関する歴史と最近の話題について報告することを主目的とする．あらましは以下の通りである．Kähler-Einstein 計量の存在問題は $c_1(M) > 0$ の場合が未解決である．すなわち Fano 多様体 M 上に Kähler-Einstein 計量が存在するための必要十分条件を見つけることが問題である．この答えと考えられているのが上記の Yau-Tian-Donaldson 予想である．この問題はいくつかの異なる形に問題が一般化される．また，K 安定性で用いられる不変量はいろいろな形に一般化され，一般化された問題のそれぞれで有用な役割を果たす．例えば，この問題は偏極多様体 (M, L) に対し，いつ $c_1(L)$ を代表する Kähler 形式で，スカラー曲率一定となるものが存在するかという定式化に一般化され，またこの一般化で考える方が GIT の観点からは見通しが良い．この他，Kähler とは限らない複素多様体上にある種のエルミート計量を見つける問題で，Kähler-Einstein 計量の存在問題の拡張になるものもある．

1. Kähler-Einstein 計量の存在問題

M をコンパクト複素多様体，g を M の Kähler 計量とする．すなわち，$z_1, \cdots, z_m$ を局所正則座標とし

$$\omega = \sqrt{-1} \sum_{i,j=1}^{m} g_{i\bar{j}}\, dz_i \wedge d\bar{z}_j \tag{1}$$

とおくと ω は M の局所座標の取り方によらない大域的な 2 次微分形式であり，
(1) 行列 $(g_{i\bar{j}})$ は各点で**正値**エルミート行列；
(2) $g_{i\bar{j}}$ は局所 C^∞ 級関数；
(3) $d\omega = 0$ をみたすものとする．

このとき，ω_g を g の Kähler 形式，ドラーム類 $[\omega_g]$ を Kähler 類 という．また，Kähler 計量を持つ複素多様体を Kähler 多様体という．

Kähler 計量とは複素幾何と実 Riemann 幾何双方に相性がよく，一方から他方への橋渡しを可能にする計量である．例えば Kähler 多様体では de Rham コホモロジーと Dolbeault コホモロジーは同型である．

Kähler 計量 g に対し，

$$\mathrm{Ric}(g)_{i\bar{j}} := -\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \log\det(g_{k\bar{\ell}}) \tag{2}$$

により与えられる 2 階のテンソル $\mathrm{Ric}(g)_{i\bar{j}}$ を **Ricci 曲率**という．

特性類の理論（Chern-Weil 理論）によれば第 1 Chern 類 $c_1(M)$ は

$$\rho_g := \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \sum_{i,j=1}^{m} \mathrm{Ric}(g)_{i\bar{j}}\, dz_i \wedge d\bar{z}_j = -\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial} \log\det(g_{k\bar{\ell}}) \tag{3}$$

Date: 2012 年 3 月 30 日.

により代表される．その意味で ρ_g は Ricci 形式とも，第 1 Chern 形式とも呼ばれる．

一般に，ある実定数 λ に対し

$$\mathrm{Ric}(g)_{i\bar{j}} = \lambda\, g_{i\bar{j}} \tag{4}$$

つまり

$$2\pi\rho_g = \lambda\omega_g \tag{5}$$

となるとき，g は Kähler-Einstein 計量と呼ばれる．これは物理的には重力場の方程式にあたる．

Ricci 曲率は正の相似拡大により不変であるから $\lambda = 1,\ 0,\ -1$ と正規化して良い．まず，$\lambda = 1$ としよう．このとき

$$c_1(M) = [\rho_g] = 1/2\pi[\omega_g] \tag{6}$$

は正の $(1,1)$ 類である．つまり K_M^{-1} は ample，または M は Fano 多様体である．

以上をまとめると，次の通りである．

$\lambda = 1$ の Kähler-Einstein 計量を持つ $\Longrightarrow$ M は Fano 多様体である．ただし M が Fano とは $c_1(K_M^{-1}) = c_1(M) > 0$ が成り立つ時を言う．

問題　$\Longleftarrow$ はいつ成り立つか？

$\lambda = -1$ のときと $\lambda = 0$ のときは解決済みである．すなわち，

$\lambda = -1$　の Kähler-Einstein 計量を持つ $\Longleftrightarrow c_1(M) < 0.$
$\lambda = 0$　の Kähler-Einstein 計量（Calabi-Yau 計量）を持つ $\Longleftrightarrow c_1(M) = 0.$

が既に証明されている．上述野通り $\Longrightarrow$ はどちらも自明である．$\Longleftarrow$ は $\lambda = -1$ の場合は Aubin [2] と Yau [40] が独立に，$\lambda = 0$ の場合は Yau [40] がそれぞれ 1970 年代後半に証明を与えた．いずれも多様体については $c_1(M) < 0$ と $c_1(M) = 0$ 以外には付加的条件は何もついていないことに注意しよう．

$\lambda = 1$ の場合は，いくつかの障害が知られており，従って $c_1(M) > 0$ 以外に何らかの付加的条件を付けないと，Kähler-Einstein 計量の存在は示す事はできないことが知られている．その典型例は Kähler-Einstein 計量（もっと一般にスカラー曲率一定 Kähler 計量）を持つ Kähler 多様体においては正則ベクトル場全体のなす複素 Lie 環 $\mathfrak{h}(M)$ が reductive であるという事実（Lichnerowicz-松島の定理 [25], [30]）である．もう一つの例は $\mathfrak{h}(M)$ の指標 $f : \mathfrak{h}(M) \to \mathbb{C}$ が存在し，もし M が Kähler-Einstein 計量を持つならば $f = 0$ となるという筆者の結果（[14]）である．この $f : \mathfrak{h}(M) \to \mathbb{C}$ は次のようにして定義される．今，M は Fano 多様体と仮定し，$c_1(M) > 0$ であるので，Kähler 形式 ω を $\omega \in 2\pi c_1(M)$ となるように取る．Kähler-Einstein 計量がもし存在し，ω がその Kähler 形式であるなら $\omega \in 2\pi c_1(M)$ をみたすから，この取り方は必然である．またその Ricci 形式 $\rho(\omega)$ も $c_1(M)$ を代表する．従って，ある滑らかな実関数 $F \in C^\infty(M)$ が存在し，

$$2\pi\rho(\omega) = \omega + i\partial\bar{\partial}F \tag{7}$$

となるものが存在する．F が定数になることと ω が Kähler-Einstein 計量の Kähler 形式であることとは同値であるが，任意に選んだ Kähler 計量は Kähler-Einstein 計

量でとは限らないので一般には F は定数ではない．このとき，$X \in \mathfrak{h}(M)$ に対し

$$f(X) = \int_M XF\ \omega^m \tag{8}$$

により f を定義する．ここに $m = \dim_{\mathbb{C}} M$ である．この f は $\omega \in 2\pi c_1(M)$ を選んで定義されているが，実は $\omega \in 2\pi c_1(M)$ の取り方によらない（[14]）．したがって複素多様体 M の自己同型群の作用で不変である．自己同型群の Lie 環が $\mathfrak{h}(M)$ であるから f は Lie 環の指標になる．

講演タイトルの K 安定性とは，一口に言うと，この不変量を f を数値的判定法の不変量として用いる GIT 安定性である．K 安定性のきちんとした定義は第３節で与える．予想は次ぎのように述べられる．

Yau-Tian-Donaldson 予想（[41], [39], [10]）
Fano 多様体 M が Kähler-Einstein 計量を持つ $\Longleftrightarrow$ M は K polystability をみたす．

この予想を最初に具体的かつ詳細に研究したのは Tian [39] である．そのあらましは次の通りである．

１．次節で述べるように Kähler-Einstein 計量の存在を示す問題は Monge-Ampère 方程式の解の存在を示すことに帰着される．また，このことは満渕 K-汎関数の固有性を示す事と同値である．満渕 K-汎関数は Kähler 計量全体のなす空間上の凸関数であるから，計量全体のなす空間の無限遠での振る舞いを見ればよい．この振る舞いは特別な場合として，M が高次元複素射影空間内で特異多様体 M_0 に退化し，誘導計量が特異になる時を考えるとき，M_0 上のその特異計量に対して定義される f（ここでは M の f と区別するため f_0 と表す）の符号を見る事により調べられる．

２．この f_0 は Chow weight の漸近展開に現れるので，ある種の GIT 安定性を見ることと考えられる．

３．f_0 は積分を用いて定義され，計量によらないことを示すには Stokes の定理が成り立つ（従って部分積分ができる）程度の特異点を持つ場合のみを考える必要がある．そこで，Tian [39] では特異多様体は正規と仮定した．この場合，特異点は複素余次元が 2 あり，Stokes の定理は成立する．

４．$\mathbb{C}^*$ 同変な正規多様体 M_0 への退化を考えると，もし M が Kähler-Einstein 計量を持つなら $f_0(X) \geq 0$ となる．ここに X は $\mathbb{C}^*$ 作用の無限小生成元である．

５．そこで，任意の $\mathbb{C}^*$ 同変な正規多様体 M_0 への退化に対し $f_0(X) \geq 0$ となるとき，M は K 半安定であると Tian は定義した．また，さらに $f_0(X) = 0$ が成立するのは $\mathbb{C}^*$ 作用が M の自己同型で $M \times \mathbb{C}$ に diagonal に作用し，中心ファイバー M_0 は M であるときに限るとき，M は弱 K 安定であると定義した．

６．Tian [39] は $\mathfrak{h}(M) = 0$ なる Fano 多様体 M で Kähler-Einstein 計量が存在しない例があることを１〜４の議論を用いて証明している．$\mathfrak{h}(M) = 0$ ならば，$\mathfrak{h}(M)$ は reductive で $f = 0$ であるから Lichnerowicz-松島の障害も，筆者の障害も消えていることに注意しよう．

以上が Tian [39] の概略であるが，M の退化は一般には正規ではないので，正規でない代数多様体にも定義されるように，代数幾何的量のみを用いて不変量 f を Donaldson [10] が定義し直し，それを用いて K 安定性等が定義された．これは後述のテスト配位という形で退化を記述して表現される．等号が成り立つ場合を５と同様に定めた場合を K-polystability という．そして M に Kähler-Einstein 計量が存在するための必要十分条件は M が K-polystable であると予想された．

しかし，その後，等号が成立する場合は５で記述された状況になるとは限らないこと，しかしテスト配位の全空間が正規かつ自己同型群が離散的なら５で記述された状況になることが Li-Xu [24]，Stoppa [38] により指摘された．こうした pathology

に基づき，修正された定義は第 3 節で述べる．また，Li-Xu [24] は Minimal model program with scaling を用いることにより，M の退化 M_0 は正規である場合のみ考えればよいことを証明している．

2. Monge-Ampère 方程式

Kähler-Einstein 計量が存在することを証明することは次の Monge-Ampère 方程式の解の存在を証明する事に帰着される．与えられた Kähler 計量 $(g_{i\bar{j}})$ と $F \in C^\infty(M)$ に対し

$$\frac{\det(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j})}{\det(g_{i\bar{j}})} = e^{-\lambda\varphi + F}$$

$$(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}) > 0$$

をみたす $\varphi \in C^\infty(M)$ の解の存在を証明せよ．この F は $\lambda = 1$ の場合，式 (7) により定まったものである．

この方程式の感触を得るために $\dim_{\mathbb{C}} M = 1$ のときを考察してみよう．この場合，方程式は

$$1 + \Delta\varphi = e^{-\lambda\varphi + F} \tag{9}$$

となる．簡単のため $F = 0$ とすると

$$1 + \Delta\varphi = e^{-\lambda\varphi} \tag{10}$$

となる．

更に $\lambda = 0$ とすると

$$1 + \Delta\varphi = 1 \tag{11}$$

となるので，$\varphi = \mathrm{const}$ が一意的解となる．

$\lambda = -1$ とすると最大値原理を用いるとやはり $\varphi = 0$ が一意的解となることがわかる．

しかし，$\lambda = 1$ とすると最大値原理は使えず，何も言えない．実際，方程式 (24) で $\lambda = 1$ とした場合，2 次元球面上の滑らかな関数 F のうち，どのような F に対して解を持つか，は難しい問題である．

3. 豊富な直線束とスカラー曲率，およびと K 安定性

M コンパクト複素多様体とし，$L \to M$ を positive (ample) 複素直線束とする．すなわち，ドラームコホモロジー類 $c_1(L)$ は正の $(1,1)$ 型閉形式（つまり Kähler 形式）

$$\omega = i g_{i\bar{j}}\, dz^i \wedge d\bar{z}^j \tag{12}$$

で代表されるときをいう．この場合 $c_1(L) > 0$ と表現する．$c_1(L)$ を代表する正の $(1,1)$ 型閉形式全体はこの意味で Kähler 形式の空間とみなされる．(12) において Kähler 形式 ω とその係数 $g = (g_{i\bar{j}})$ は区別せず，ω を計量と混同して扱うことが多い．

Kähler 計量 g またはその Kähler 形式 ω の**スカラー曲率** σ は

$$\sigma = \sum_{i,j=1}^{m} g^{i\bar{j}}\, \mathrm{Ric}(g)_{i\bar{j}} \tag{13}$$

により定義される．ここに $(g^{i\bar{j}})$ は $(g_{i\bar{j}})$ の逆行列である．

問題 $c_1(L)$ に属する Kähler 形式でスカラー曲率一定のものがいつ存在するか? 偏極多様体 (M, L) についての条件を求めよ．

スカラー曲率一定 Kähler 計量はしばしば cscK 計量（constant scalar curvature Kähler metric）と略される．
M が Fano のとき，$L = K_M^{-1}$ と取ると

Kähler 形式 $\omega \in 2\pi c_1(L)$ は cscK $\iff$ ω は Kähler-Einstein

となる．つまり，偏極多様体 (M, L) で cscK を考えるのは Kähler-Einstein の存在問題の一般化である．実は，この問題設定の方が GIT の観点から見通しが良いことが藤木 [13] および Donaldson [12] により明らかにされている．また，X. Wang [42] は Lichnerowicz-松島の定理も筆者の指標 f も GIT の枠組みで説明できることを明らかにしている．[18] も参照されたい．このことについては 2008 年 3 月の企画特別講演で述べたが，以下に概略をまとめておく．要点は次の 2 点である．
• GIT での安定軌道 = モーメント写像の零点を持つ軌道（これはよく知られた一般論）．
• cscK 計量 = 無限次元シンプレクティック多様体上の無限次元シンプレクティック微分同相群の複素化の作用の軌道上にあるモーメント写像の零点（藤木明，S.K.Donaldson）

よって
• cscK 計量を持つ $\iff$ Kähler 計量が動く空間が "無限次元シンプレクティック-GIT 安定"
となる．

さて，以下に K 安定性のきちんとした定義を述べたい．その前に，cscK 計量が存在するための障害として $f : \mathfrak{h}(M) \to \mathbb{C}$ がどのような形に拡張するか述べておきたい．この場合は $F \in C^\infty(M)$ を

$$\sigma = \int_M \sigma\omega^m / \int_M \omega^m + \Delta F \tag{14}$$

を満たすように取り，f を (8) と同じ式で定義すれば良い（[15], [5], [3] ）．[16] も参照せよ．

$\Lambda \to N$ を n 次元射影スキーム N 上の豊富な直線束とする．Λ には束同型としての $\mathbb{C}^*$-作用があり，この作用は N への $\mathbb{C}^*$-作用を誘導するものとする．

このとき任意の正の整数 k に対し，$W_k = H^0(N, \Lambda^k)$ への $\mathbb{C}^*$-作用が誘導される．$d_k = \dim W_k$ とおき，w_k を $\wedge^{d_k} W_k$ への $\mathbb{C}^*$-作用のウェイトとする．

Riemann-Roch および同変 Riemann-Roch の定理により d_k と w_k はそれぞれ次数 n および $n+1$ の k を変数とする多項式になる．従って，w_k/kd_k は k が無限大に近づくとき有界であり，十分大きい k に対し

$$\frac{w_k}{kd_k} = F_0 + F_1 k^{-1} + F_2 k^{-2} + \cdots \tag{15}$$

と展開することができる．

補題 3.1 (Donaldson [10])**.** F_1 の定義において，もし N が非特異射影多様体であるならば

$$F_1 = \frac{-1}{2vol(N, \omega)} f(X) \tag{16}$$

が成立する．ただし X は $\mathbb{C}^*$-作用の無限小生成元.

定義 3.2. $-F_1$ を **Donaldson-Futaki invariant** という.

F_1 を不変量として数値的判定法の考え方を apply したい．

非特異射影代数多様体 M とその上の豊富な直線束 L に対し，指数 r の**テスト配位 (test configuration)** とは次のものからなる．
(1) 固有かつ平坦なスキームの射 $\pi : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$;
(2) $\mathcal{M}$ への $\mathbb{C}^*$-作用で $\mathbb{C}$ への通常の $\mathbb{C}^*$-作用を覆うもの;
(3) $\mathbb{C}^*$-同変直線束 $\mathcal{L} \to \mathcal{M}$;
(4) $t \neq 0$ に対し $M_t = \pi^{-1}(t) \cong M$ かつ $(M_t, \mathcal{L}|_{M_t}) \cong (M, L^r)$.

$\mathbb{C}^*$-作用は中心ファイバー $L_0 \to M_0 = \pi^{-1}(0)$ への $\mathbb{C}^*$-作用を誘導する．よって (M_0, L_0) **の F_1 を考えることができる**．このとき，

$$DF(\mathcal{M}, \mathcal{L}) = -F_1 \tag{17}$$

とおき，これをテスト配位 $(\mathcal{M}, \mathcal{L})$ の Donaldson-Futaki invariant と呼ぶ.

上では，cscK 計量の存在を問題としたいので M は非特異射影代数多様体としたが，$\mathbb{Q}$-Fano 多様体とする場合（[24]），polarized S_2 variety とする場合（[32], [33]）もある．

もし (M, L) が $\mathbb{C}^*$-作用を持てば，直積 $L \times \mathbb{C} \to M \times \mathbb{C}$ が自然にテスト配位を与える．これを**直積配位**という．

直積配位において $\mathbb{C}^*$ が M に自明に作用するとき，この配位は自明な配位であるという．

定義 3.3. (M, L) が **K 半安定**（または **K 安定**）であるとは，任意の自明でないテスト配位 $(\mathcal{M}, \mathcal{L})$ に対し $DF(\mathcal{M}, \mathcal{L})$ が非正（または負）であるときをいう．(M, L) が **K polystable** であるとは，正規テスト配位 $(\mathcal{M}, \mathcal{L})$ に対し $DF(\mathcal{M}, \mathcal{L}) \geq 0$ であり，等号が成立するのはテスト配位 $(\mathcal{M}, \mathcal{L})$ が直積配位であるときに限るときをいう.

Fano 多様体の場合に Tian が考察した M の退化 M_0 は test configuration の中心ファイバー M_0 にあたる．K-polystable の時のみ正規テスト配位としたのは，Li-Xu [24] により，正規でないと等号が成立しても直積配位にならない例があることを指摘されたからである．また正規性の仮定のもとではこのような例はなく，cscK 計量の存在から K-polystability の証明が成立することが確かめられている（Stoppa [38]).
予想 (Yau-Tian-Donaldson) : (M, L) を偏極多様体とする．Kähler 類 $c_1(L)$ に定スカラー Kähler 計量が存在するための必要十分条件は (M, L) が K polystable であることであろう.

この予想は第 1 節で述べた Yau-Tian-Donaldson 予想の cscK 版である．この予想の必要性の証明は既に得られている（Chen-Tian [7], Donaldson [11], Stoppa [37], [38] , 満渕 [29]）.

上述の K-polystability の定義において，正規テスト配位というときは $\mathcal{M}$ が正規であることを意味する．前述の通り，M が Fano 多様体の場合，中心ファイバー M_0 が正規であることを仮定して K （半）安定性を定義すれば十分であることが Li-Xu [24] により確かめられている．また，Arezzo-Della Vedova-La Nave [1] は中心ファイバーが reduced normal crossing singularities のみを持つときを調べれば十分であることを証明している.

4. 不変量のいろいろな一般化

M をコンパクト複素多様体とする．次の (I), (II) の 2 つの設定が仮定されているとしよう．

(I) 複素 Lie 群 G を構造群とする主束 $P_G \to M$, P_G 上の $(1,0)$-型接続形式 θ が与えられ，Θ を θ の曲率形式とする．M の複素多様体としての自己同型群 $\mathrm{Aut}(M)$ のある部分群 H は P_G への作用に持ち上がっているとする．P_G に G は右から H は左から作用し，G と H の作用は可換であるとする．

(II) $\Omega \in H^2_{DR}(M)$ を Kähler 類とし，固定する．Ω から Kähler 形式 ω を選んだ時，H の Lie 環 $\mathfrak{h}$ の元 X を M 上の正則ベクトル場とみなすと，複素数値関数 $u_X \in C^\infty_{\mathbb{C}}(M)$ で

$$i(X)\omega = -\overline{\partial} u_X \tag{18}$$

をみたすものが存在すると仮定する．このような u_X は定数差を除いて一意的に決まるので，

$$\int_M u_X \ \omega^m = 0 \tag{19}$$

となるように正規化する．

以上の (I), (II) のもとに k 次 G 不変多項式全体を $I^k(G)$ により表す：

$$I^k(G) = \{\phi : \mathrm{Sym}^k(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C} \mid \phi \circ \mathrm{Ad}(g) = \phi\}.$$

そして $\phi \in I^k(G)$ と $X \in \mathfrak{h}$ に対し，

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\phi(X) &= (m-k+1)\int_M \phi(\Theta) \wedge u_X\,\omega^{m-k} \\ &\quad + \int_M \phi(\theta(X)+\Theta) \wedge \omega^{m-k+1} \end{aligned} \tag{20}$$

とおく．

定理 4.1 ([17])**.** $\mathcal{F}_\phi(X)$ *は* P_G *の* $(1,0)$*-型接続形式* θ *の選び方にも，*M *の Kähler 形式* $\omega \in \Omega$ *の選び方にもよらない．*$\mathcal{F}_\phi : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ *は Lie 環準同型である．*

更にこれらの $\mathcal{F}_\phi$ は筆者が興味を持って来た，微分幾何で有用な以下の 3 つの場合 (a), (b), (c) を含む．ただ，式 (3) は H.Cartan による同変コホモロジーに関する古い文献 [6] に現れていると言うこともでき，その意味で定理 4.1 は筆者の結果とは言えないかもしれない．しかし，文献 [6] では代数的位相幾何の表し方を用いており，微分幾何における有用性は定理 4.1 のような微分幾何的表現がなされていて初めてわかることである．

(a) 各 Kähler 類において，k 次 Chern 形式が調和形式になるような Kähler 計量を持つための障害 ([14], [15], [5], [3])．
(b) 漸近的 Chow 安定性の障害 ([17], [27])．
(c) 非 Kähler でもよいコンパクト複素多様体の不変量 ([20])．

これらの 3 つの共通部分にあるのは M が Fano 多様体であり，$\mathcal{F}_\phi$ が Kähler-Einstein 計量が存在するための障害である場合である．以下では (a)，(b) のそれぞれについて少し詳しく述べ，(c) については第 6 節で詳述する．

(a) $G = GL(m,\mathbb{C})$ とし，P_G は M の正則接束 $T'M$ の枠束とする．枠束とは T'_pM の基底全体をすべての $p \in M$ にわたって集めた多様体である．右から $GL(m,\mathbb{C})$ が基底の取り換えとして作用している．ここでは 接続 θ は Kähler 形式 ω の Levi-Civita

接続を取る．$I^*(GL(m,\mathbb{C}))$ は固有値の j-次基本対称式 c_j により生成されている．ここでは ϕ として k-次基本対称式 c_k を取る．すると $\mathcal{F}_{c_k}$ の第２項は常に 0 になる．そして，$\mathcal{F}_{c_k}$ は，k 次 Chern 形式 $c_k(\omega)$ が調和形式となるような Kähler 形式 ω が Ω の中に存在するための障害となる（[3]）．特に $k=1$ の場合，$c_1(\omega)$ が調和であることと ω のスカラー曲率が一定であることとは同値であるので，Ω にスカラー曲率一定 Kähler 計量が存在するための障害となる．また更に，M が Fano 多様体のとき，すなわち $c_1(M)>0$ （これは $c_1(M)$ が Kähler 形式で代表できるという意味である）のとき，$c_1(M)$ に属するスカラー曲率一定 Kähler 計量は Kähler-Einstein 計量であるから，$\Omega=c_1(M)$ と取る時，$\mathcal{F}_{c_1}$ は Fano 多様体 M が Kähler-Einstein 計量を持つための障害となる．もちろん $\mathcal{F}_{c_k}$ は第１節，第２節で述べた f の拡張である．

(b) ある豊富な直線束 $L\to M$ に対し $\Omega=c_1(L)$ と書けているとしよう．P_G は再び $T'M$ の枠束で，$G=GL(m,\mathbb{C})$ とする．H は下で説明する $\mathrm{Aut}(M,L)$ を取る．ϕ は ℓ-次 Todd 多項式 $\mathrm{Td}^{(\ell)}$ とする．するともし (M,L) が漸近的 Chow 半安定ならば $\ell=1,\cdots,m$ に対し $\mathcal{F}_{\mathrm{Td}^{(\ell)}}=0$ となる（[17], [21]）.

$\mathcal{F}_{\mathrm{Td}^{(1)}}$ は $\mathcal{F}_{c_1}$ と比例するので，$c_1(L)$ にスカラー曲率一定 Kähler 計量が存在するための障害になる．

7 次元トーリック Fano 多様体で $\mathcal{F}_{\mathrm{Td}^{(1)}}=0$，$\mathcal{F}_{\mathrm{Td}^{(\ell)}}\neq 0$，$2\leq\ell\leq 7$ となるものが存在する．ただし，$\Omega=c_1(M)$ と取る．Wang-Zhu [43] の定理によると $\mathcal{F}_{c_1}=0$ なるトーリック Fano 多様体には Kähler-Einstein 計量が存在する．しかし，$\mathcal{F}_{\mathrm{Td}^{(\ell)}}\neq 0$，$2\leq\ell\leq 7$ であるから，漸近的 Chow 不安定である．この例は Nill-Paffenholz [31] により　Kähler-Einstein 多様体であるが Batyrev-Selivanova [4] の意味で対称ではない例として見出された．$2\leq\ell\leq 7$ に対する $\mathcal{F}_{\mathrm{Td}^{(\ell)}}$ はすべて比例していて，0 ではない．この計算は小野-佐野-四ツ谷 [34] によりなされた．

$L\to M$ を豊富な直線束とするとき，M の自己同型群 $\mathrm{Aut}(M)$ の部分群で L への作用に持ち上がるものの極大なものを $\mathrm{Aut}(M,L)$ により表す．実は $\mathrm{Aut}(M,L)$ の Lie 環は，M 上の正則ベクトル場 X で，ある複素数値関数 $u_X\in C^\infty_{\mathbb{C}}(M)$ により

$$i(X)\omega=-\overline{\partial}u_X \tag{21}$$

と表されるものの全体のなす Lie 環 $\mathfrak{h}_0(M)$ に一致する．Donaldson [9] によると，$\mathrm{Aut}(M,L)$ が離散的のとき，$c_1(L)$ にスカラー曲率一定計量が存在するならば漸近的 Chow 安定である．上記の例は，$\mathrm{Aut}(M,L)$ が離散的でないときは事情が大きく異なることを示している．

満渕 [28] によると漸近的 Chow 安定性と 漸近的 Hilbert 安定性は同値である．これの簡明な証明が尾高 [33] によっても与えられている．

5. 漸近的 Chow 半安定に対する障害と高次 CM 直線

第４節での導入した不変量 $\mathcal{F}_{\mathrm{Td}^1}$ は Hilbert 多項式 χ を持つ $\mathbb{P}^N$ の部分概形全体のなす Hilbert 概形 $\mathcal{H}$ の CM line λ_{CM} に対する Mumford weight とみなせることを Paul-Tian [35], [36] は示した．さらに，Della Vedova-Zuddas [8] は高次の $\mathcal{F}_{\mathrm{Td}^i}$ についても同様の見方が出来ることを示した．本節は [8] の紹介である．

(M,L) を m-次元偏極多様体とする．１助変数部分群 $\rho:\mathbb{C}^*\to\mathrm{Aut}(M,L)$ とその L への持ち上げ $\tilde{\rho}:\mathbb{C}^*\to\mathrm{Aut}(L)$ に対し，行列式直線 $\otimes_{i=0}^m(\det H^i(M,L))^{(-1)^i}$ に誘導される作用の重みを $w(M,L)$ により，Euler-Poincare 標数 $\sum_{i=0}^m(-1)^i\dim H^i(M,L)$ を $\chi(M,L)$ により表す．もちろん，L の十分高い冪を取ることにより $i>0$ に対し $H^i(M,L)=0$ と仮定して良い．

Riemann-Roch の定理と同変 Riemann-Roch 定理により $\chi(M, L^k)$ と $w(M, L^k)$ は次のような多項式により表される.

$$\chi(M, L^k) = a_0(M, L)k^m + a_1(M, L)k^{m-1} + \cdots + a_m(M, L), \tag{22}$$

$$w(M, L^k) = b_0(M, L)k^{m+1} + b_1(M, L)k^m + \cdots + b_{m+1}(M, L). \tag{23}$$

(M, L^k) に対する Chow weight $\mathrm{Chow}(M, L^k)$ は次で与えられる.

$$\mathrm{Chow}(M, L^k) = \frac{w(M, L^k)}{k\chi(M, L^k)} - \frac{b_0(M, L)}{a_0(M, L)}. \tag{24}$$

このとき次のような展開を容易に得る.

$$\begin{aligned} \mathrm{Chow}(M, L^k) &= \frac{b_{m+1}(M, L)}{k\chi(M, L^k)} \\ &\quad + \frac{a_0(M, L)}{k\chi(M, L^k)} \sum_{\ell=1}^{m} \frac{a_0(M, L)b_\ell(M, L) - b_0(M, L)a_\ell(M, L)}{a_0(M, L)^2} k^{m+1-\ell}. \end{aligned} \tag{25}$$

M が非特異の場合は第 1 項 b_{m+1} は 0 になることが [20] で示されている. $F_\ell(M, L)$ を

$$F_\ell(M, L) = \frac{a_0(M, L)b_\ell(M, L) - b_0(M, L)a_\ell(M, L)}{a_0(M, L)^2} \tag{26}$$

により定義しよう. M が滑らかな場合, Riemann-Roch の定理により $\chi(M, L)$ は Todd 類と $c_1(L)$ により表され, 同変 Riemann-Roch の定理により $w(M, L)$ は Todd 類, $c_1(L)$, M の接束の接続, L の接続, および X を用いて表される. L の接続および X は $\mathcal{F}_\phi(X)$ の定義式 (20) の中に Hamiltonian 関数 u_X の形で現れている. 従って $a_i(M, L)$ と $b_j(M, L)$ はこれらの特性類と接続を用いて書き表される. Della Vedova-Zuddas は $F_\ell(M, L)$ は ρ の持ち上げ $\tilde{\rho} : \mathbb{C}^* \to \mathrm{Aut}(L)$ によらないことを示し, 更に M が滑らかで X が作用 $\rho : \mathbb{C}^* \to \mathrm{Aut}(M, L)$ の無限小生成元の時

$$F_\ell(M, L) = \frac{1}{vol(M, L)} \mathcal{F}_{\mathrm{Td}^\ell}(X) \tag{27}$$

が成り立つ事を示した. $\ell = 1$ の場合が前出の 補題 3.1 であるので, 式 (27) は 補題 3.1 の拡張である.

定義 5.1. (M, L) を偏極多様体（または概形）とする. $-F_1(M, L)$ を (M, L) の *DF-*不変量と呼ぶ.

第 4 節で述べたように K 安定性は $F_1(M, L)$ を数値的判定法の不変量として用いる GIT 安定性である.

Hilbert 多項式 χ を持つ $\mathbb{P}^N$ の部分概形のなす Hilbert 概形 $\mathcal{H}$ 上の普遍平坦族を $f : \mathcal{U} \to \mathcal{H}$ とし, $\iota : \mathcal{U} \to \mathcal{H} \times \mathbb{CP}^N$ を自然な埋め込みとする. このとき $f = \mathrm{pr}_{\mathcal{H}} \circ \iota$ である. $\mathcal{L} = \iota^* \circ \mathrm{pr}_{\mathcal{H}}^* \mathcal{O}(1)$ を $\mathcal{U}$ 上の相対豊富直線束とする. k が十分大のとき任意の $x \in \mathcal{H}$ に対し $\mathrm{rank} f_*(L^k) = \dim H^0(\mathcal{U}_x, \mathcal{L}_x^k)$ かつ $\det f_*(L^k) = \det H^0(\mathcal{U}_x, \mathcal{L}_x^k)$ が成り立つ. よって

$$\mathrm{rank} f_*(L^k) = a_0 k^m + a_1 k^{m-1} + \cdots + a_m \tag{28}$$

を得る. 一方行列式直線束は [23] により, ある $\mathbb{Q}$-line bundles $\mu_0, \cdots, \mu_{m+1}$ を用いて

$$\det f_*(L^k) = \mu_0^{k^{m+1}} \otimes \mu_1^{k^m} \otimes \cdots \otimes \mu_{m+1} \tag{29}$$

と表される．このとき *Chow-line* とは

$$\lambda_{Chow}(\mathcal{H},\mathcal{L}) = \det f_*(\mathcal{L})^{\frac{1}{k \operatorname{rank} f_*(\mathcal{L})}} \otimes \mu_0^{-\frac{1}{a_0}} \tag{30}$$

により定義される $\mathcal{H}$ 上の $\mathbb{Q}$-直線束 $\lambda_{Chow}(\mathcal{H},\mathcal{L})$ のことである．容易に示されるように $\mathrm{Chow}(M,L)$ は Chow-line $\lambda_{Chow}(\mathcal{H},\mathcal{L})$ に対する Mumford weight である．(28) と (29) を用いると

$$\lambda_{Chow}(\mathcal{H},\mathcal{L}) = \mu_{m+1}^{\frac{1}{k\chi(k)}} \otimes \left(\bigotimes_{\ell=1}^{m} \left(\mu_\ell^{\frac{1}{a_0}} \otimes \mu_0^{-\frac{a_\ell}{a_0^2}} \right)^{\frac{a_0 k^{m+1-\ell}}{\chi(k)}} \right). \tag{31}$$

を示すことができる．Hilbert 概形 $\mathcal{H}$ 上の ℓ-th CM-line $\lambda_{\mathrm{CM},\ell}(\mathcal{H},\mathcal{L})$ を

$$\lambda_{\mathrm{CM},\ell}(\mathcal{H},\mathcal{L}) = \mu_\ell^{\frac{1}{a_0}} \otimes \mu_0^{-\frac{a_\ell}{a_0^2}}$$

により定義すると，$F_\ell(M,L)$ は ℓ-th CM-line $\lambda_{\mathrm{CM},\ell}(\mathcal{H},\mathcal{L})$ の weight になる．

6. 局所共形 Kähler 多様体

本節では第４節の (c) について詳述する．$k=m+1$ とする．このとき，式 (20) の第１項は 0 であり，

$$\mathcal{F}_\phi(X) = \int_M \phi(\theta(X)+\Theta) \tag{32}$$

となる．更に，P_G を $T'M$ の枠束とする．このとき，(32) は Kähler 類に無関係であるから，非 Kähler でもよいコンパクト複素多様体の不変量となる．H については (II) の条件は不要である．

以下，$\phi = c_1^{m+1}$ とし，

$$f := \frac{1}{m+1}\mathcal{F}_{c_1^{m+1}} \tag{33}$$

とおく．　このとき

$$f(X) = \int_M \mathrm{div}X \ \left(\frac{i}{2\pi}\mathrm{tr}(\Theta)\right)^m \tag{34}$$

と書かれる．X は任意の正則ベクトル場でよいので，M の正則ベクトル場全体のなす Lie 環 $\mathfrak{h}(M)$ 上の指標 $f:\mathfrak{h}(M)\to\mathbb{C}$ が得られる．

θ がある Kähler 計量 g の Levi-Civita 接続であるとき，

$$\begin{aligned} \frac{i}{2\pi}\mathrm{tr}\Theta &= -\frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log\det g \\ &= \frac{i}{2\pi}\sum_{i,j} R_{i\overline{j}}dz^i\wedge d\overline{z}^j \end{aligned}$$

である．すなわち，これは Ricci 形式である（第１ Chern 形式でもある）．これを ρ_ω により表そう：

$$\rho_\omega = \frac{i}{2\pi}\sum_{i,j} R_{i\overline{j}}dz^i\wedge d\overline{z}^j.$$

すると，$f:\mathfrak{h}(M)\to\mathbb{C}$ は

$$f(X) = \int_M \mathrm{div}X\ \rho_\omega^m \tag{35}$$

と表される．もし，ω が Kähler-Einstein 計量であるなら，$\rho_\omega = k\omega$ であるから，

$$f(X) = \int_M \mathrm{div} X\ (k\omega)^m = 0$$

となる．すなわち，f は Kähler-Einstein 計量が存在するための障害である．実際，M が Fano 多様体の場合，$\frac{1}{m+1}\mathcal{F}_{c_1}$ と f は一致する．この最後の事実の証明は [20] では Yau によって解かれた Calabi conjecture を用いてなされたが，最近直接計算による証明が Liu [26] により与えられた..

しかし，f は Kähler とは限らない任意のコンパクト複素多様体 M に対して定義される．M の C^∞ 級体積要素

$$dV = a\ idz^1 \wedge d\bar{z}^1 \wedge \cdots \wedge idz^m \wedge d\bar{z}^m$$

に対し，その Ricci 形式 ρ_{dV} を

$$\rho_{dV} = -\frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log a$$

とすると，$f : \mathfrak{h}(M) \to \mathbb{C}$ は

$$f(X) = \int_M \mathrm{div} X\ \rho_{dV}^m \tag{36}$$

と表される．ここに $\mathrm{div} X$ は

$$\mathrm{div} X = \partial(i(X)dV)/dV \tag{37}$$

により定義されるものである．

これを被覆空間上で書き表してみよう．$\pi : \tilde{M} \to M$ をコンパクト複素多様体 M の被覆空間とし，Γ を被覆変換群とする．$\chi : \Gamma \to \mathbb{R}^+$ を群の準同型写像とする．

定義 6.1. $\tilde{M}$ 上の体積要素 dV が χ に関して *automorphic* であるとは

$$\gamma^* dV = \chi(\gamma) dV$$

がすべての $\gamma \in \Gamma$ に対し成立するときをいう．

次に

$$\mathfrak{h}_\Gamma(\tilde{M}) := \{X \in \mathfrak{h}(\tilde{M}) \mid \gamma_* X = X \text{ for all } \gamma \in \Gamma\}$$

とおくと，$\mathfrak{h}_\Gamma(\tilde{M})$ の元は Γ-不変であることから M のベクトル場を定め，$\mathfrak{h}_\Gamma(\tilde{M}) \cong \mathfrak{h}(M)$ ともみなされる．発散と Ricci 形式

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(X) &= \partial(i(X)dV)/dV, \\ \rho_{dV} &= -i\partial\bar{\partial}\log dV \end{aligned}$$

はどちらも Γ-不変であるのでそれぞれ M 上の関数と 2 形式を定める．そこで $f : \mathfrak{h}_\Gamma(\tilde{M}) \to \mathbb{C}$ を (36) と同じ形の式

$$f(X) = \int_M \mathrm{div} X\ \rho_{dv}^m \tag{38}$$

により定義する．

定理 6.2 ([19])**.** 線形関数 f は χ に関し *automorphic* な体積要素 dV の選び方に依存しない．更に，f は $\Gamma = \{1\}$ の場合のもの，すなわち M 上にもともとあるものと一致する．.

定理 6.3 ([19])**.** 指標 f は *Vaisman* 多様体上では 0 になる．

ここにコンパクト複素多様体 M とその上のリーマン計量 g_0 の共形類の組 $(M,[g_0])$ が Vaisman 多様体であるとは $[g_0]$ は局所的に共形的 Kähler 計量で，ある計量 $g \in [g_0]$ とその基本 2-形式 ω，つまり $\omega(\cdot,\cdot) = g(J\cdot,\cdot)$，に対し，$d\omega = \theta \wedge \omega$ とするとき，θ が平行である時をいう（θ は Lee 形式と呼ばれるものである）．Kamishima-Ornea [22] によれば Vaisman 多様体の普遍被覆は佐々木多様体の錐多様体となっており，定理 6.3 はこの事実を用いて示される．

References

[1] C. Arezzo, A. Della Vedova and G. La Nave : Singularities and K-semistability, preprint. arXiv:0906.2475

[2] T. Aubin : Equations du type de Monge-Ampère sur les variétés kählériennes compactes, C. R. Acad. Sci. Paris, **283**, 119-121 (1976)

[3] S. Bando : An obstruction for Chern class forms to be harmonic, Kodai Math. J., 29(2006), 337-345.

[4] V.V. Batyrev and E.N. Selivanova : Einstein-Kähler metrics on symmetric toric Fano manifolds, J. Reine Angew. Math. 512 (1999) 225–236.

[5] E. Calabi : Extremal Kähler metrics II, Differential geometry and complex analysis, (I. Chavel and H.M. Farkas eds.), 95-114, Springer-Verlag, Berline-Heidelberg-New York, (1985)

[6] H. Cartan : La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibre principal. (French) Colloque de topologie (espaces fibres), Bruxelles, 1950, pp. 57–71.

[7] X.X. Chen and G. Tian : Geometry of Kähler metrics and foliations by holomorphic discs, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. No. 107 (2008), 1-107. math.DG/0409433

[8] A. Della Vedova and F. Zuddas : Scalar curvature and asymptotic Chow stability of projective bundles and blowups, preprint, arXiv:1009.5755.

[9] S.K. Donaldson : Scalar curvature and projective embeddings, I, J. Differential Geometry, 59(2001), 479-522.

[10] S.K. Donaldson : Scalar curvature and stability of toric varieties, J. Differential Geometry, 62(2002), 289-349.

[11] S.K. Donaldson : Lower bounds on the Calabi functional, J. Differential Geometry, 70(2005), 453-472.

[12] S.K. Donaldson : Remarks on gauge theory, complex geometry and four-manifold topology, in 'Fields Medallists Lectures' (Atiyah, Iagolnitzer eds.), World Scientific, 1997, 384-403.

[13] 藤木 明：偏極代数多様体の moduli 空間と Kähler 計量，数学 42 巻 (1990)，231-243.

[14] A. Futaki : An obstruction to the existence of Einstein Kähler metrics, Invent. Math. **73**, 437-443 (1983).

[15] A. Futaki : On compact Kähler manifolds of constant scalar curvature, Proc. Japan Acad., Ser. A, **59**, 401-402 (1983).

[16] A. Futaki : Kähler-Einstein metrics and integral invariants, Lecture Notes in Math., vol.1314, Springer-Verlag, Berline-Heidelberg-New York,(1988)

[17] A. Futaki : Asymptotic Chow stability and integral invariants, Intern. J. Math., **15**, 967-979, (2004).

[18] A. Futaki : Stability, integral invariants and canonical Kähler metrics, Proc. 9-th Internat. Conf. on Differential Geomtry and its Applications, 2004 Prague, (eds. J. Bures et al), 2005, 45-58, MATFYZPRESS, Prague.

[19] A. Futaki, K.Hattori and L.Ornea : An integral invariant from the view point of locally conformally Kähler geometry, to appear in Manuscripta Math., arXiv:1105.4774.

[20] A. Futaki and S. Morita : Invariant polynomials of the automorphism group of a compact complex manifold, J. Differential Geom., **21**, 135–142 (1985).

[21] A. Futaki, H. Ono and Y. Sano : Hilbert series and obstructions to asymptotic semistability, Adv. Math. 226 (2011), no. 1, 254–284.

[22] Y. Kamishima and L. Ornea : Geometric flow on compact locally conformally Kähler manifolds, Tohoku Math. J., 57 (2005), no. 2, 201–221.

[23] F. F. Knudsen and D. Mumford : The projectivity of the moduli space of stable curves I: Preliminaries on 'det' and 'Div'. Math. Scand. **39** (1976), 19–55.

[24] C. Li and C.Y. Xu : Special test configurations and K-stability of Fano varieties, preprint. arXiv:1111.5398.

[25] A. Lichnerowicz : Géometrie des groupes de transformations, Dunod, Paris (1958).
[26] C.J. Liu : Bando-Futaki invariants on hypersurfaces, Trans. Amer. Math. Soc. 362 (2010), no. 6, 2923–2962.
[27] T. Mabuchi, An obstruction to asymptotic semi-stability and approximate critical metrics, Osaka J. Math., **41** (2004), 463–472.
[28] T. Mabuchi : Chow-stability and Hilbert-stability in Mumford's geometric invariant theory, Osaka J. Math. 45 (2008), no. 3, 833–846.
[29] T. Mabuchi : K-stability of constant scalar curvature polarization, preprint. arXiv:0812.4093
[30] Y. Matsushima : Sur la structure du groupe d'homéomorphismes d'une certaine variété kaehlérienne, Nagoya Math. J., **11**, 145-150 (1957)
[31] B. Nill and A. Paffenholz : Examples of non-symmetric Kähler-Einstein toric Fano manifolds, preprint. arXiv:0905.2054
[32] Y. Odaka : The GIT stability of Polarized Varieties via Discrepancy, preprint, arXiv:0807.1716.
[33] Y. Odaka : A generalization of Ross-Thomas' slope theory, to appear in Osaka J. Math. arXiv:0910.1794.
[34] H.Ono, Y.Sano and N.Yostutani : An example of asymptotically Chow unstable manifolds with constant scalar curvature, to appear in Annales de L'Institut Fourier. arXiv:0906.3836.
[35] S.T. Paul and G. Tian : CM Stability and the Generalized Futaki Invariant I., preprint. math.AG/0605278, 2006.
[36] S.T. Paul and G. Tian : CM stability and the generalized Futaki invariant II. Astérisque No. **328** (2009), 339–354.
[37] J. Stoppa : K-stability of constant scalar curvature Kähler manifolds, Adv. Math., 221 (2009), 1397–1408. arXiv:0803.4095
[38] J. Stoppa : A note on the definition of K-stability, preprint. arXiv : 1111.5826.
[39] G. Tian : Kähler-Einstein metrics with positive scalar curvature, Invent. Math., **130**, 1-37 (1997).
[40] S.-T. Yau : On Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **74**, 1798-1799 (1977).
[41] S.-T. Yau, Open problems in Geometry, Proc. Symp. Pure Math. 54 (1993) 1-28.
[42] X.-W. Wang : Moment maps, Futaki invariant and stability of projective manifolds, Comm. Anal. Geom. 12 (2004), no. 5, 1009–1037.
[43] X.-J. Wang and X. Zhu : Kähler-Ricci solitons on toric manifolds with positive first Chern class, Adv. Math., 188 (2004), no. 1, 87–103.

東京都目黒区大岡山 2-12-1, 東京工業大学理工学研究科数学専攻, 〒 152-8551
E-mail address: futaki@math.titech.ac.jp