Kähler および佐々木・Einstein 多様体
に関する最近の進展

二木 昭人
東京工業大学理工学研究科数学専攻

日本数学会秋季総合分科会総合講演，2009年9月

1. Kähler-Einstein 多様体と cscK 多様体

1. Kähler-Einstein 多様体と cscK 多様体

M コンパクト複素多様体

$L \to M$ positive (ample) 複素直線束, i.e. $c_1(L) > 0$.

1. Kähler-Einstein 多様体と cscK 多様体

M コンパクト複素多様体

$L \to M$ positive (ample) 複素直線束, i.e. $c_1(L) > 0$.

つまりドラームコホモロジー類 $c_1(L)$ は次のような正の２次閉微分形式 ω で代表される：

$z_1, \cdots, z_m$ を局所正則座標とし

$$\omega = \sqrt{-1} \sum_{i,j=1}^{m} g_{i\bar{j}}\, dz_i \wedge d\overline{z}_j$$

とおくと

$z_1, \cdots, z_m$ を局所正則座標とし

$$\omega = \sqrt{-1} \sum_{i,j=1}^{m} g_{i\bar{j}} \, dz_i \wedge d\bar{z}_j$$

とおくと

(1)　行列 $(g_{i\bar{j}})$ は各点で**正値**エルミート行列；

$z_1, \cdots, z_m$ を局所正則座標とし

$$\omega = \sqrt{-1} \sum_{i,j=1}^{m} g_{i\bar{j}}\, dz_i \wedge d\bar{z}_j$$

とおくと

(1)　行列 $(g_{i\bar{j}})$ は各点で**正値**エルミート行列；

(2)　$g_{i\bar{j}}$ は局所 C^∞ 級関数；

$z_1, \cdots, z_m$ を局所正則座標とし

$$\omega = \sqrt{-1} \sum_{i,j=1}^{m} g_{i\bar{j}} \, dz_i \wedge d\bar{z}_j$$

とおくと

(1) 行列 $(g_{i\bar{j}})$ は各点で**正値**エルミート行列；

(2) $g_{i\bar{j}}$ は局所 C^∞ 級関数；

(3) $d\omega = 0$.

$z_1, \cdots, z_m$ を局所正則座標とし

$$\omega = \sqrt{-1} \sum_{i,j=1}^{m} g_{i\bar{j}}\, dz_i \wedge d\overline{z}_j$$

とおくと

(1) 行列 $(g_{i\bar{j}})$ は各点で**正値**エルミート行列；

(2) $g_{i\bar{j}}$ は局所 C^∞ 級関数；

(3) $d\omega = 0$.

逆に，整係数コホモロジー類を代表するこのような ω に対し
$c_1(L) = [\omega]$ なる複素直線束 L が存在する.

一般に M の Hermite 計量 $g=(g_{i\bar{j}})$ に対し

$$\omega_g = \sqrt{-1}\sum_{i,j=1}^{m} g_{i\bar{j}}\ dz_i \wedge d\bar{z}_j$$

とおくとき，$d\omega_g = 0$ となる　Hermite 計量 g を Kähler 計量といい，ω_g を g の Kähler 形式，ドラーム類 $[\omega_g]$ をKähler 類 という．

一般に M の Hermite 計量 $g = (g_{i\bar{j}})$ に対し

$$\omega_g = \sqrt{-1} \sum_{i,j=1}^{m} g_{i\bar{j}}\, dz_i \wedge d\bar{z}_j$$

とおくとき，$d\omega_g = 0$ となる　Hermite 計量 g を Kähler 計量といい，ω_g を g の Kähler 形式，ドラーム類 $[\omega_g]$ をKähler 類 という.

Kähler 計量を持つ複素多様体を Kähler 多様体という.

一般に M の Hermite 計量 $g = (g_{i\bar{j}})$ に対し

$$\omega_g = \sqrt{-1} \sum_{i,j=1}^{m} g_{i\bar{j}}\, dz_i \wedge d\bar{z}_j$$

とおくとき, $d\omega_g = 0$ となる Hermite 計量 g を Kähler 計量といい, ω_g を g の Kähler 形式, ドラーム類 $[\omega_g]$ をKähler 類 という.

Kähler 計量を持つ複素多様体を Kähler 多様体という.

Kähler 計量とは複素幾何と実 Riemann 幾何双方に相性がよく,
一方から他方への橋渡しを可能にする計量である.

一般に M の Hermite 計量 $g=(g_{i\bar{j}})$ に対し

$$\omega_g=\sqrt{-1}\sum_{i,j=1}^{m} g_{i\bar{j}}\, dz_i\wedge d\bar{z}_j$$

とおくとき，$d\omega_g=0$ となる　Hermite 計量 g を Kähler 計量といい，ω_g を g の Kähler 形式，ドラーム類 $[\omega_g]$ をKähler 類 という.

Kähler 計量を持つ複素多様体を Kähler 多様体という.

Kähler 計量とは複素幾何と実 Riemann 幾何双方に相性がよく，
一方から他方への橋渡しを可能にする計量である.
例えば Kähler 多様体では de Rham コホモロジーと Dolbeault コホモロジーは同型である.

L ample のとき $c_1(L)$ を Kähler 類とみなす.

または Kähler 形式の空間とみなす.

L ample のとき $c_1(L)$ を Kähler 類とみなす.

または Kähler 形式の空間とみなす.

Kähler 計量 g に対し,

$$\mathrm{Ric}(g)_{i\bar{j}} := -\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \overline{z}_j} \log \det(g_{k\bar{\ell}})$$

により与えられる2階のテンソル $\mathrm{Ric}(g)_{i\bar{j}}$ を**Ricci 曲率**という.

L ample のとき $c_1(L)$ を Kähler 類とみなす.
または Kähler 形式の空間とみなす.

Kähler 計量 g に対し,

$$\mathrm{Ric}(g)_{i\bar{j}} := -\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \overline{z}_j} \log\det(g_{k\bar{\ell}})$$

により与えられる2階のテンソル $\mathrm{Ric}(g)_{i\bar{j}}$ を**Ricci 曲率**という.

特性類の理論（Chern-Weil 理論）によれば第1 Chern類 $c_1(M)$ は

$$\rho_g := \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \sum_{i,j=1}^{m} \mathrm{Ric}(g)_{i\bar{j}}\, dz_i \wedge d\overline{z}_j = -\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\overline{\partial} \log\det(g_{k\bar{\ell}})$$

により代表される.

L ample のとき $c_1(L)$ を Kähler 類とみなす.
または Kähler 形式の空間とみなす.

Kähler 計量 g に対し,

$$\mathrm{Ric}(g)_{i\bar{j}} := -\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \overline{z}_j} \log\det(g_{k\bar{\ell}})$$

により与えられる2階のテンソル $\mathrm{Ric}(g)_{i\bar{j}}$ を**Ricci 曲率**という.

特性類の理論（Chern-Weil 理論）によれば第1 Chern類 $c_1(M)$ は

$$\rho_g := \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \sum_{i,j=1}^{m} \mathrm{Ric}(g)_{i\bar{j}}\, dz_i \wedge d\overline{z}_j = -\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\overline{\partial} \log\det(g_{k\bar{\ell}})$$

により代表される.

その意味で ρ_g は Ricci 形式とも，第１Chern 形式とも呼ばれる.

スカラー曲率 σ は

$$\sigma = \sum_{i,j=1}^{m} g^{i\bar{j}} \, \mathrm{Ric}(g)_{i\bar{j}}$$

により定義される．ここに $(g^{i\bar{j}})$ は $(g_{i\bar{j}})$ の逆行列.

スカラー曲率 σ は

$$\sigma = \sum_{i,j=1}^{m} g^{i\bar{j}}\ \mathrm{Ric}(g)_{i\bar{j}}$$

により定義される．ここに $(g^{i\bar{j}})$ は $(g_{i\bar{j}})$ の逆行列.

問題　$c_1(L)$ に属する Kähler 形式でスカラー曲率一定のものがいつ存在するか?

(M, L) の組, i.e. “偏極多様体”，についての条件を求めよ.

スカラー曲率 σ は

$$\sigma = \sum_{i,j=1}^{m} g^{i\bar{j}} \, \mathrm{Ric}(g)_{i\bar{j}}$$

により定義される．ここに $(g^{i\bar{j}})$ は $(g_{i\bar{j}})$ の逆行列.

問題 $c_1(L)$ に属する Kähler 形式でスカラー曲率一定のものがいつ存在するか?

(M, L) の組, i.e. "偏極多様体", についての条件を求めよ.

スカラー曲率一定ケーラー計量＝
constant scalar curvature Kähler (cscK) metric

$L = K_M^{-1} (:= \wedge^m T' M)$ が ample のときを考える

（i.e. M は Fano 多様体).

$c_1(K_M^{-1}) = c_1(M) > 0$.

$L = K_M^{-1}(:= \Lambda^m T' M)$ が ample のときを考える
（i.e. M は Fano 多様体).
$c_1(K_M^{-1}) = c_1(M) > 0$.

補題　このときは cscK 計量は
$\mathrm{Ric}(g)_{i\bar{j}} = g_{i\bar{j}}$, すなわち $2\pi\rho_g = \omega_g$
と同じになる.

$L = K_M^{-1}(:= \Lambda^m T'M)$ が ample のときを考える
（i.e. M は Fano 多様体).
$c_1(K_M^{-1}) = c_1(M) > 0$.

補題　このときは cscK 計量は
$\mathrm{Ric}(g)_{i\bar{j}} = g_{i\bar{j}}$，すなわち $2\pi\rho_g = \omega_g$
と同じになる.

一般に，ある実定数 λ に対し

$$\mathrm{Ric}(g)_{i\bar{j}} = \lambda\ g_{i\bar{j}}$$

となるとき，g は Kähler-Einstein 計量と呼ばれる.（重力場の方程式）

$L = K_M^{-1} (:= \Lambda^m T'M)$ が ample のときを考える
（i.e. M は Fano 多様体).
$c_1(K_M^{-1}) = c_1(M) > 0$.

補題　このときは cscK 計量は
$\mathrm{Ric}(g)_{i\bar{j}} = g_{i\bar{j}}$, すなわち $2\pi\rho_g = \omega_g$
と同じになる.

一般に, ある実定数 λ に対し

$$\mathrm{Ric}(g)_{i\bar{j}} = \lambda \; g_{i\bar{j}}$$

となるとき, g は Kähler-Einstein 計量と呼ばれる.（重力場の方程式）

逆に g がEinstein すなわち $\mathrm{Ric}(g)_{i\bar{j}} = \lambda g_{i\bar{j}}$ の場合は σ が一定であるのは明らかである. ($\sigma = \lambda m$).

よって Fano 多様体 M においては

$c_1(K_M^{-1}) = c_1(M) > 0$ に cscK 計量が存在

$\Longleftrightarrow M$ は Kähler-Einstein 計量を持つ.

よって Fano 多様体 M においては

$c_1(K_M^{-1}) = c_1(M) > 0$ に cscK 計量が存在

$\Longleftrightarrow$ M は Kähler-Einstein 計量を持つ.

問題 Fano 多様体 M はいつ Kähler-Einstein 計量を持つか？

2008年３月の企画特別講演の概要

2008年3月の企画特別講演の概要

この問題は GIT 安定性と密接に関連する.

2008年3月の企画特別講演の概要

この問題は GIT 安定性と密接に関連する.

- GIT での安定軌道 ＝ モーメント写像の零点を持つ軌道
（これはよく知られた一般論）

2008年3月の企画特別講演の概要

この問題は GIT 安定性と密接に関連する.

• GIT での安定軌道 ＝ モーメント写像の零点を持つ軌道（これはよく知られた一般論）
• cscK 計量 ＝ 無限次元シンプレクティック多様体上の無限次元シンプレクティック微分同相群の複素化の作用の軌道上にあるモーメント写像の零点（藤木明，S.K.Donaldson）

2008年3月の企画特別講演の概要

この問題は GIT 安定性と密接に関連する.

• GIT での安定軌道 ＝ モーメント写像の零点を持つ軌道
（これはよく知られた一般論）
• cscK 計量 ＝ 無限次元シンプレクティック多様体上の無限次元シンプレクティック微分同相群の複素化の作用の軌道上にあるモーメント写像の零点（藤木明，S.K.Donaldson）

よって
• cscK 計量を持つ $\Longleftrightarrow$ Kähler 計量が動く空間が "無限次元シンプレクティック-GIT 安定"

2008年3月の企画特別講演の概要

この問題は GIT 安定性と密接に関連する.

- GIT での安定軌道 ＝ モーメント写像の零点を持つ軌道

（これはよく知られた一般論）

- cscK 計量 ＝ 無限次元シンプレクティック多様体上の無限次元シンプレクティック微分同相群の複素化の作用の軌道上にあるモーメント写像の零点（藤木明, S.K.Donaldson）

よって

- cscK 計量を持つ $\Longleftrightarrow$ Kähler 計量が動く空間が "無限次元シンプレクティック-GIT 安定"

この見方は正しい考え方の方向を示唆する筈.

本総合講演で取り上げる問題　cscsK 計量の存在は偏極多様体 (M, L) の代数幾何における標準的 GIT 安定性とどう関係するか？

本総合講演で取り上げる問題　cscsK 計量の存在は偏極多様体 (M, L) の代数幾何における標準的 GIT 安定性とどう関係するか？

ここまでのまとめ：

本総合講演で取り上げる問題　cscsK 計量の存在は偏極多様体 (M, L) の代数幾何における標準的 GIT 安定性とどう関係するか？

ここまでのまとめ：

Kähler-Einstein 計量と GIT 安定性の関係を論ずるのが本講演の目的であるが，実は，GIT 安定性と相性が良いのは Kähler-Einstein 計量を特別な場合として含むスカラー曲率一定 Kähler 計量（cscK 計量）である．

本総合講演で取り上げる問題　cscsK 計量の存在は偏極多様体 (M, L) の代数幾何における標準的 GIT 安定性とどう関係するか？

ここまでのまとめ：

Kähler-Einstein 計量と GIT 安定性の関係を論ずるのが本講演の目的であるが, 実は, GIT 安定性と相性が良いのは Kähler-Einstein 計量を特別な場合として含むスカラー曲率一定 Kähler 計量（cscK 計量）である.

安定性との関連性を論ずる場合は Kähler 形式 ω は $c_1(L) = [\omega]$ for some L とする.

$c_1(M) > 0$ の場合における Kähler-Einstein 計量の存在の障害は cscK 計量が存在するための障害として拡張されている.

$c_1(M) > 0$ の場合における Kähler-Einstein 計量の存在の障害は cscK 計量が存在するための障害として拡張されている.

<u>Lichnerowicz-松島の定理</u>　M をコンパクト cscK 多様体とする. このとき正則ベクトル場全体のなす複素 Lie 環 $\mathfrak{h}(M)$ は簡約可能(reductive)である.

$c_1(M) > 0$ の場合における Kähler-Einstein 計量の存在の障害は cscK 計量が存在するための障害として拡張されている.

Lichnerowicz-松島の定理 M をコンパクト cscK 多様体とする．このとき正則ベクトル場全体のなす複素 Lie 環 $\mathfrak{h}(M)$ は簡約可能(reductive)である.

Calabi-Futaki の定理 M をコンパクト Kähler 多様体とする．このとき Kähler 類のみに依存する Lie 環準同型 $f : \mathfrak{h}(M) \to \mathbb{C}$ （二木不変量と呼ばれるもの）が存在して，もしその Kähler 類に cscK 計量が存在するならば $f = 0$ となる.

$c_1(M) > 0$ の場合における Kähler-Einstein 計量の存在の障害は cscK 計量が存在するための障害として拡張されている．

Lichnerowicz-松島の定理　M をコンパクト cscK 多様体とする．このとき正則ベクトル場全体のなす複素 Lie 環 $\mathfrak{h}(M)$ は簡約可能(reductive)である．

Calabi-Futaki の定理　M をコンパクト Kähler 多様体とする．このとき Kähler 類のみに依存する Lie 環準同型 $f : \mathfrak{h}(M) \to \mathbb{C}$ （二木不変量と呼ばれるもの）が存在して，もしその Kähler 類に cscK 計量が存在するならば $f = 0$ となる．

したがって，この２つの結果は cscK 計量が存在するための障害を与える．また，この２つの定理は “無限次元シンプレクティック-GIT 安定性” の障害として解釈できる（Xiaowei Wang）．

この他ある種の GIT 安定性が障害になることが知られており，また必要十分条件と予想されている条件も GIT 安定性の変種である（K-安定性）.

この他ある種の GIT 安定性が障害になることが知られており，また必要十分条件と予想されている条件も GIT 安定性の変種である（K-安定性）.

以下，代数幾何の標準的 GIT 安定性である Chow 安定性と cscK 計量の存在との関係について述べる.

この他ある種の GIT 安定性が障害になることが知られており，また必要十分条件と予想されている条件も GIT 安定性の変種である（K-安定性）.

以下，代数幾何の標準的 GIT 安定性である Chow 安定性と cscK 計量の存在との関係について述べる.

Chow 安定性とは何か？

コンパクト複素多様体 M 上の positive line bundle $L \longrightarrow M$ に対し，$c_1(L)$ を Kähler 類とみなす.

コンパクト複素多様体 M 上の positive line bundle $L \longrightarrow M$ に対し，$c_1(L)$ を Kähler 類とみなす.

高次のテンソル積を取った $L^k (= L^{\otimes k})$ に対し，L^k の正則切断全体のなすベクトル空間 $H^0(M, \mathcal{O}(L^k))$ の双対空間の射影化に M を埋め込むことができる（小平埋め込み定理）.

コンパクト複素多様体 M 上の positive line bundle $L \to M$ に対し，$c_1(L)$ を Kähler 類とみなす.

高次のテンソル積を取った $L^k(= L^{\otimes k})$ に対し，L^k の正則切断全体のなすベクトル空間 $H^0(M, \mathcal{O}(L^k))$ の双対空間の射影化に M を埋め込むことができる（小平埋め込み定理）.

$V_k := H^0(M, \mathcal{O}(L^k))^*$

$M_k \subset \mathbb{P}(V_k)$ the image of Kodaira embedding by L^k

コンパクト複素多様体 M 上の positive line bundle $L \to M$ に対し，$c_1(L)$ を Kähler 類とみなす.

高次のテンソル積を取った $L^k (= L^{\otimes k})$ に対し，L^k の正則切断全体のなすベクトル空間 $H^0(M, \mathcal{O}(L^k))$ の双対空間の射影化に M を埋め込むことができる（小平埋め込み定理）.

$V_k := H^0(M, \mathcal{O}(L^k))^*$

$M_k \subset \mathbb{P}(V_k)$ the image of Kodaira embedding by L^k

$d_k =$ the degree of M_k in $\mathbb{P}(V_k)$

$m = \dim_{\mathbb{C}} M$.

$m+1$ 個の $\mathbb{P}(V_k^*)$ の直積 $\mathbb{P}(V_k^*) \times \cdots \times \mathbb{P}(V_k^*)$ は $m+1$ 個の $\mathbb{P}(V_k)$ の超平面 $H_1, \cdots, H_{m+1}$ を定める.

$m = \dim_{\mathbb{C}} M$.

$m+1$ 個の $\mathbb{P}(V_k^*)$ の直積 $\mathbb{P}(V_k^*) \times \cdots \times \mathbb{P}(V_k^*)$ は $m+1$ 個の $\mathbb{P}(V_k)$ の超平面 $H_1, \cdots, H_{m+1}$ を定める.

$\{(H_1, \cdots, H_{m+1}) \in \mathbb{P}(V_k^*) \times \cdot \cdot \times \mathbb{P}(V_k^*) | H_1 \cap \cdot \cdot \cap H_{m+1} \cap M_k \neq \emptyset\}$ は $\mathbb{P}(V_k^*) \times \cdot \cdot \times \mathbb{P}(V_k^*)$ の因子を定める.

$m = \dim_{\mathbb{C}} M$.

$m+1$ 個の $\mathbb{P}(V_k^*)$ の直積 $\mathbb{P}(V_k^*) \times \cdots \times \mathbb{P}(V_k^*)$ は $m+1$ 個の $\mathbb{P}(V_k)$ の超平面 $H_1, \cdots, H_{m+1}$ を定める.

$\{(H_1, \cdots, H_{m+1}) \in \mathbb{P}(V_k^*) \times \cdot\cdot \times \mathbb{P}(V_k^*) | H_1 \cap \cdot\cdot \cap H_{m+1} \cap M_k \neq \emptyset\}$ は $\mathbb{P}(V_k^*) \times \cdot\cdot \times \mathbb{P}(V_k^*)$ の因子を定める.

M_k の次数は d_k であるからこの因子はある $\hat{M}_k \in (Sym^{d_k}(V_k))^{\otimes m+1}$ により与えられる.

$m = \dim_{\mathbb{C}} M$.

$m+1$ 個の $\mathbb{P}(V_k^*)$ の直積 $\mathbb{P}(V_k^*) \times \cdots \times \mathbb{P}(V_k^*)$ は $m+1$ 個の $\mathbb{P}(V_k)$ の超平面 $H_1, \cdots, H_{m+1}$ を定める.

$\{(H_1, \cdots, H_{m+1}) \in \mathbb{P}(V_k^*) \times \cdot\cdot \times \mathbb{P}(V_k^*) | H_1 \cap \cdot\cdot \cap H_{m+1} \cap M_k \neq \emptyset\}$ は $\mathbb{P}(V_k^*) \times \cdot\cdot \times \mathbb{P}(V_k^*)$ の因子を定める.

M_k の次数は d_k であるからこの因子はある $\widehat{M}_k \in (Sym^{d_k}(V_k))^{\otimes m+1}$ により与えられる.

$\widehat{M}_k$ は定数倍を除いて一意的に決まる.

$m = \dim_{\mathbb{C}} M$.

$m+1$ 個の $\mathbb{P}(V_k^*)$ の直積 $\mathbb{P}(V_k^*) \times \cdots \times \mathbb{P}(V_k^*)$ は $m+1$ 個の $\mathbb{P}(V_k)$ の超平面 $H_1, \cdots, H_{m+1}$ を定める.

$\{(H_1, \cdots, H_{m+1}) \in \mathbb{P}(V_k^*) \times \cdot \cdot \times \mathbb{P}(V_k^*) | H_1 \cap \cdot \cdot \cap H_{m+1} \cap M_k \neq \emptyset\}$ は $\mathbb{P}(V_k^*) \times \cdot \cdot \times \mathbb{P}(V_k^*)$ の因子を定める.

M_k の次数は d_k であるからこの因子はある $\hat{M}_k \in (Sym^{d_k}(V_k))^{\otimes m+1}$ により与えられる.

$\hat{M}_k$ は定数倍を除いて一意的に決まる.
点 $[\hat{M}_k] \in \mathbb{P}((Sym^{d_k}(V_k))^{\otimes m+1})$ を (M, L^k) の **Chow 点** と呼ぶ.

$SL(V_k)$ の作用に関し $\widehat{M}_k$ が安定とは，その軌道が閉集合であり，固定部分群が有限群であるときをいう.

$SL(V_k)$ の作用に関し $\widehat{M}_k$ が安定とは，その軌道が閉集合であり，固定部分群が有限群であるときをいう.

$SL(V_k)$ の作用に関し $\widehat{M}_k$ が半安定であるとは，その軌道の閉包が $\mathbf{o}$ を含まないときをいう.

$SL(V_k)$ の作用に関し $\widehat{M}_k$ が安定とは，その軌道が閉集合であり，固定部分群が有限群であるときをいう．

$SL(V_k)$ の作用に関し $\widehat{M}_k$ が半安定であるとは，その軌道の閉包が $\mathbf{o}$ を含まないときをいう．

$(Sym^{d_k}(V_k))^{\otimes m+1}$ への $SL(V_k)$ の作用に関し $\widehat{M}_k$ が安定（半安定）のとき，M は L^k に関し **Chow 安定（半安定）である**という．

$SL(V_k)$ の作用に関し $\widehat{M}_k$ が安定とは，その軌道が閉集合であり，固定部分群が有限群であるときをいう.

$SL(V_k)$ の作用に関し $\widehat{M}_k$ が半安定であるとは，その軌道の閉包が $\mathbf{o}$ を含まないときをいう.

$(Sym^{d_k}(V_k))^{\otimes m+1}$ への $SL(V_k)$ の作用に関し $\widehat{M}_k$ が安定（半安定）のとき，M は L^k に関し **Chow 安定（半安定）である**という.

ある $k_0 > 0$ が存在して，任意の $k \geq k_0$ に対し，$\widehat{M}_k$ が安定であるとき，偏極多様体 (M, L) は**漸近的に Chow 安定**であるという．漸近的に Chow 半安定であることも同様.

定理 A(Donaldson, 2001) Aut(M, L) は離散群であるとする．もし $c_1(L)$ に属するスカラー曲率一定の Kähler 形式が存在するならば，(M, L) は漸近的に Chow 安定である．

定理 A(Donaldson, 2001)　Aut(M, L) は離散群であるとする．もし $c_1(L)$ に属するスカラー曲率一定の Kähler 形式が存在するならば, (M, L) は漸近的に Chow 安定である.

この定理における Aut(M, L) は離散群であるという仮定は安定性の定義における固定部分群が有限群という仮定にあたる.

それでは $\mathrm{Aut}(M, L)$ が離散群でない場合はどうか？

それでは $\mathrm{Aut}(M, L)$ が離散群でない場合はどうか？

$SL(V_k)$-作用による $\widehat{M}_k$ の軌道が閉集合のとき，$\widehat{M}_k$ は polystable であるという.（$\mathrm{Aut}(M, L)$ は離散群でなくてもよい.）

それでは Aut(M, L) **が離散群でない場合はどうか？**

$SL(V_k)$-作用による $\widehat{M}_k$ の軌道が閉集合のとき，$\widehat{M}_k$ は polystable であるという.（Aut(M, L) は離散群でなくてもよい.）

ある k_0 に対し，任意の $k \geq k_0$ に対し $\widehat{M}_k$ が polystable のとき，(M, L) は漸近的 polystable であるという.

それでは Aut(M, L) が離散群でない場合はどうか？

$SL(V_k)$-作用による $\widehat{M}_k$ の軌道が閉集合のとき，$\widehat{M}_k$ は polystable であるという.（Aut(M, L) は離散群でなくてもよい.）

ある k_0 に対し，任意の $k \geq k_0$ に対し $\widehat{M}_k$ が polystable のとき，(M, L) は漸近的 polystable であるという.

Aut(M, L) は離散群でない場合，満渕俊樹は漸近的Chow半安定であるための障害があることを見いだした.

定理 B (満渕, 2004)

(M, L) を偏極多様体とする.

もし Aut(M, L) が離散群でないなら

漸近的 Chow 半安定性の障害が存在する.

定理 B (満渕, 2004)

(M, L) を偏極多様体とする.

もし $\mathrm{Aut}(M, L)$ が離散群でないなら

漸近的 Chow 半安定性の障害が存在する.

定理 C (満渕, 2005)

(M, L) を偏極多様体とする．また $\mathrm{Aut}(M, L)$ は離散的でないとする.

もし cscK 計量が $c_1(L)$ に存在し，定理 B で述べた障害が消えるな

らば(M, L) は漸近的に Chow polystable である.

定理 B (満渕, 2004)
(M, L) を偏極多様体とする.
もし Aut(M, L) が離散群でないなら
漸近的 Chow 半安定性の障害が存在する.

定理 C (満渕, 2005)
(M, L) を偏極多様体とする．また Aut(M, L) は離散的でないとする.
もし cscK 計量が $c_1(L)$ に存在し，定理 B で述べた障害が消えるならば(M, L) は漸近的に Chow polystable である.

定理 D(F, 2004)　定理 B で述べた漸近的半安定の障害は積分不変量の族を用いいて表現される.

定理 B (満渕, 2004)

(M, L) を偏極多様体とする.

もし Aut(M, L) が離散群でないなら

漸近的 Chow 半安定性の障害が存在する.

定理 C (満渕, 2005)

(M, L) を偏極多様体とする．また Aut(M, L) は離散的でないとする.

もし cscK 計量が $c_1(L)$ に存在し，定理 B で述べた障害が消えるならば(M, L) は漸近的に Chow polystable である.

定理 D(F, 2004)　定理 B で述べた漸近的半安定の障害は積分不変量の族を用いいて表現される.

以下は定理 D の解説.

M の正則ベクトル場全体のなす複素 Lie 環 を $\mathfrak{h}(M)$ により表し,

$$\mathfrak{h}_0(M) = \{X \in \mathfrak{h}(M) \mid X \text{ は零点を持つ}\}$$

とおく.

M の正則ベクトル場全体のなす複素 Lie 環 を $\mathfrak{h}(M)$ により表し,

$$\mathfrak{h}_0(M) = \{X \in \mathfrak{h}(M) \,|\, X \text{ は零点を持つ}\}$$

とおく．このとき， $X \in \mathfrak{h}_0(M)$ に対し滑らかな複素数値関数 u_X で

$$i(X)\omega = -\overline{\partial} u_X$$

をみたすものが一意的に存在する.

M の正則ベクトル場全体のなす複素 Lie 環 を $\mathfrak{h}(M)$ により表し,

$$\mathfrak{h}_0(M) = \{X \in \mathfrak{h}(M) \,|\, X \text{ は零点を持つ}\}$$

とおく．このとき， $X \in \mathfrak{h}_0(M)$ に対し滑らかな複素数値関数 u_X で

$$i(X)\omega = -\overline{\partial} u_X$$

をみたすものが一意的に存在する.

この意味で $\mathfrak{h}_0(M)$ は正則Hamilton ベクトル場全体と一致する.

M の正則ベクトル場全体のなす複素 Lie 環 を $\mathfrak{h}(M)$ により表し,

$$\mathfrak{h}_0(M) = \{X \in \mathfrak{h}(M) \,|\, X \text{ は零点を持つ}\}$$

とおく．このとき， $X \in \mathfrak{h}_0(M)$ に対し滑らかな複素数値関数u_X で

$$i(X)\omega = -\overline{\partial} u_X$$

をみたすものが一意的に存在する.

この意味で $\mathfrak{h}_0(M)$ は正則Hamilton ベクトル場全体と一致する.

実は $\mathfrak{h}_0(M)$ は Aut(M, L) の Lie 環.

M の正則ベクトル場全体のなす複素 Lie 環 を $\mathfrak{h}(M)$ により表し,

$$\mathfrak{h}_0(M) = \{X \in \mathfrak{h}(M) \,|\, X \text{ は零点を持つ}\}$$

とおく. このとき, $X \in \mathfrak{h}_0(M)$ に対し滑らかな複素数値関数 u_X で

$$i(X)\omega = -\overline{\partial} u_X$$

をみたすものが一意的に存在する.

この意味で $\mathfrak{h}_0(M)$ は正則Hamilton ベクトル場全体と一致する.

実は $\mathfrak{h}_0(M)$ は Aut(M, L) の Lie 環.

Hamilton 関数 u_X は常に

$$\int_M u_X \, \omega^m = 0$$

と正規化しておくことにする.

次に M の正則接束 $T'M$ の $(1,0)$-型接続 ∇ を一つ取る.

つまり, ∇ の接続形式が $(1,0)$-型であるように取る.

Θ を ∇ の曲率形式とする.

次に M の正則接束 $T'M$ の $(1,0)$-型接続 ∇ を一つ取る.
つまり, ∇ の接続形式が $(1,0)$-型であるように取る.
Θ を ∇ の曲率形式とする.

更に滑らかな $(1,0)$-型ベクトル場 X に対し

$$L(X) = \nabla_X - L_X$$

とおく. ここに L_X は Lie 微分を表す.

次に M の正則接束 $T'M$ の (1, 0)-型接続 ∇ を一つ取る.
つまり, ∇ の接続形式が (1, 0)-型であるように取る.
Θ を ∇ の曲率形式とする.

更に滑らかな (1, 0)-型ベクトル場 X に対し

$$L(X) = \nabla_X - L_X$$

とおく. ここに L_X は Lie 微分を表す.
$L(X)$ は End$(T'M)$ の滑らかな切断を定める.

次に M の正則接束 $T'M$ の $(1,0)$-型接続 ∇ を一つ取る.
つまり, ∇ の接続形式が $(1,0)$-型であるように取る.
Θ を ∇ の曲率形式とする.

更に滑らかな $(1,0)$-型ベクトル場 X に対し

$$L(X) = \nabla_X - L_X$$

とおく. ここに L_X は Lie 微分を表す.
$L(X)$ は $\mathrm{End}(T'M)$ の滑らかな切断を定める.

$\phi \in I^k(GL(m,\mathbb{C}))$ に対し,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\phi(X) \;=\; & (m-k+1)\int_M \phi(\Theta)\wedge u_X\,\omega^{m-k} \\ & + \int_M \phi(L(X)+\Theta)\wedge\omega^{m-k+1}\end{aligned}$$

とおく.

命題 $\mathcal{F}_\phi(X)$ は M の Kähler 形式 $\omega \in c_1(L)$ の選び方にも，$T'M$ の $(1,0)$-型接続形式 ∇ の選び方にもよらない.

命題　$\mathcal{F}_\phi(X)$ は M の Kähler 形式 $\omega \in c_1(L)$ の選び方にも，$T'M$ の $(1,0)$-型接続形式 ∇ の選び方にもよらない.

定理(=定理 D（F，2004））　もし偏極多様体（M, L）が漸近的に Chow 半安定ならば，$1 \leq \ell \leq m$ に対し

$$\mathcal{F}_{Td^\ell}(X) = 0$$

が成立する．特に $\ell = 1$ の場合不変量 $f : \mathfrak{h}(M) \to \mathbb{C}$ が消えることを意味する.

$\ell = 1$ の場合不変量 $f : \mathfrak{h}(M) \to \mathbb{C}$ と一致することは次のようにして確かめられる.

$\ell = 1$ の場合不変量 $f : \mathfrak{h}(M) \to \mathbb{C}$ と一致することは次のようにして確かめられる.

$\mathrm{Td}^1 = \frac{1}{2} c_1$ であり c_1 はトレイスなので

$$\mathcal{F}_{\mathrm{Td}^1}(X) = \frac{m}{2} \int_M \sigma u_X \omega^m.$$

$\ell = 1$ の場合不変量 $f : \mathfrak{h}(M) \to \mathbb{C}$ と一致することは次のようにして確かめられる.

$\mathrm{Td}^1 = \frac{1}{2}c_1$ であり c_1 はトレイスなので

$$\mathcal{F}_{\mathrm{Td}^1}(X) = \frac{m}{2}\int_M \sigma u_X \omega^m.$$

これはスカラー曲率一定 Kähler 計量が存在するための障害になる.

$\ell = 1$ の場合不変量 $f : \mathfrak{h}(M) \to \mathbb{C}$ と一致することは次のようにして確かめられる.

$\mathrm{Td}^1 = \frac{1}{2}c_1$ であり c_1 はトレイスなので

$$\mathcal{F}_{\mathrm{Td}^1}(X) = \frac{m}{2}\int_M \sigma u_X \omega^m.$$

これはスカラー曲率一定 Kähler 計量が存在するための障害になる.

なぜならもし σ が定数ならば正規化条件

$$\int_M u_X\,\omega^m = 0$$

により

$$\mathcal{F}_{\mathrm{Td}^1}(X) = 0$$

となるからである.

定理(F-小野肇-佐野友二，arXiv:0811.1315）

定理(F-小野肇-佐野友二, arXiv:0811.1315)

- M がトーリック Fano 多様体の場合, $\mathcal{F}_{Td^{\ell}}$ が Hilbert series の微分で書ける.

定理(F-小野肇-佐野友二，arXiv:0811.1315）

• M がトーリック Fano 多様体の場合，$\mathcal{F}_{Td^\ell}$ が Hilbert series の微分で書ける.

• 3 次元までのトーリック Fano 多様体では $\{\mathcal{F}_{Td^\ell}\}_{\ell=1,\cdots,m}$ が 2 次元以上を張る例がある.

定理(F-小野肇-佐野友二, arXiv:0811.1315)

• M がトーリック Fano 多様体の場合, $\mathcal{F}_{Td^\ell}$ が Hilbert series の微分で書ける.

• 3 次元までのトーリック Fano 多様体では $\{\mathcal{F}_{Td^\ell}\}_{\ell=1,\cdots,m}$ が 2 次元以上を張る例がある.

• 3 次元まででは $\mathcal{F}_{Td^1} = 0$ であるが, ある $\ell \geq 2$ に対し, $\mathcal{F}_{Td^\ell} \neq 0$ なる例は存在しないことがわかった.

定理(F-小野肇-佐野友二，arXiv:0811.1315）

• M がトーリック Fano 多様体の場合，$\mathcal{F}_{Td^\ell}$ が Hilbert series の微分で書ける.

• 3 次元までのトーリック Fano 多様体では $\{\mathcal{F}_{Td^\ell}\}_{\ell=1,\cdots,m}$ が 2 次元以上を張る例がある.

• 3 次元までででは $\mathcal{F}_{Td^1} = 0$ であるが，ある $\ell \geq 2$ に対し，$\mathcal{F}_{Td^\ell} \neq 0$ なる例は存在しないことがわかった.

さらにそのような例を見つけるには，Batyrev-Selivanova の意味で対称でないが，$\mathcal{F}_{Td^1} = 0$ なる例を見つける必要があることがわかる.

定理(F-小野肇-佐野友二，arXiv:0811.1315)

- M がトーリック Fano 多様体の場合，$\mathcal{F}_{Td^\ell}$ が Hilbert series の微分で書ける.
- 3 次元までのトーリック Fano 多様体では $\{\mathcal{F}_{Td^\ell}\}_{\ell=1,\cdots,m}$ が 2 次元以上を張る例がある.
- 3 次元までででは $\mathcal{F}_{Td^1} = 0$ であるが，ある $\ell \geq 2$ に対し，$\mathcal{F}_{Td^\ell} \neq 0$ なる例は存在しないことがわかった.

さらにそのような例を見つけるには，Batyrev-Selivanova の意味で対称でないが，$\mathcal{F}_{Td^1} = 0$ なる例を見つける必要があることがわかる.

ここにトーリック Fano 多様体が Batyrev-Selivanova の意味で対称であるとは，Aut(M) における極大トーラスの Weyl 群による代数的指標全体のなすベクトル空間への作用の不動点集合が 0 のみからなるときをいう.

定理(Nill-Paffenholz, arXiv:0905.2054)

Batyrev-Selivanova の意味で対称でないが, $\mathcal{F}_{Td^1} = 0$ なる 7 次元トーリック Fano 多様体の例が存在する.

定理(Nill-Paffenholz, arXiv:0905.2054)
Batyrev-Selivanova の意味で対称でないが, $\mathcal{F}_{Td^1} = 0$ なる 7 次元トーリック Fano 多様体の例が存在する.

定理(小野肇-佐野友二-四ツ谷直仁, arXiv:0906.3836)
Nill-Paffenholz の例においては, $\ell \geq 2$ に対し $\mathcal{F}_{Td^\ell} \neq 0$ となる. よって漸近的 Chow 半安定でない Kähler-Einstein トーリック Fano 多様体が存在する.

以上のまとめ

以上のまとめ

Donaldson は Aut(M, L) が離散的な場合，cscK 計量が存在すれば (M, L) は漸近的 Chow 安定であることを示した.

以上のまとめ

Donaldson は Aut(M, L) が離散的な場合，cscK 計量が存在すれば (M, L) は漸近的 Chow 安定であることを示した．

しかし Aut(M, L) が離散的でない場合は cscK 計量が存在しても (M, L) は漸近的 Chow 半安定でない例が存在する．

以上のまとめ

Donaldson は Aut(M,L) が離散的な場合，cscK 計量が存在すれば (M,L) は漸近的 Chow 安定であることを示した.

しかし Aut(M,L) が離散的でない場合は cscK 計量が存在しても (M,L) は漸近的 Chow 半安定でない例が存在する.

予想(Yau-Tian-Donaldson)：(M,L) を偏極多様体とする．Kähler 類 $c_1(L)$ に定スカラー Kähler 計量が存在するための必要十分条件は (M,L) が K-polystableであることであろう.

2．　佐々木-Einstein 計量の存在問題

2.　佐々木-Einstein 計量の存在問題

$2m+1$ 次元リーマン多様体 (S, g) が

佐々木多様体

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$$C(S) = S \times \mathbb{R}_+, \quad \overline{g} = dr^2 + r^2 g$$

により与えられる錐多様体

$(C(S), \overline{g})$ が **Kähler**.

2. 佐々木-Einstein 計量の存在問題

$2m+1$ 次元リーマン多様体 (S,g) が

佐々木多様体

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$$C(S) = S \times \mathbb{R}_+, \quad \overline{g} = dr^2 + r^2 g$$

により与えられる錐多様体

$(C(S), \overline{g})$ が **Kähler**.

このとき $\dim_{\mathbb{C}} C(S) = m+1$.

S が **トーリック**

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ T^{m+1} の $C(S)$ への効果的正則等長作用がある.

このとき $(\mathbb{C}^*)^{m+1}$ も自然に作用する.

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $C(S)$ が通常の複素幾何の意味でトーリック

S が **トーリック**

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ T^{m+1} の $C(S)$ への効果的正則等長作用がある.

このとき $(\mathbb{C}^*)^{m+1}$ も自然に作用する.

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $C(S)$ が通常の複素幾何の意味でトーリック

(S, g) が アインシュタイン多様体のとき

佐々木・アインシュタイン多様体という.

S が **トーリック**

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ T^{m+1} の $C(S)$ への効果的正則等長作用がある.

このとき $(\mathbb{C}^*)^{m+1}$ も自然に作用する.

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $C(S)$ が通常の複素幾何の意味でトーリック

(S, g) が アインシュタイン多様体のとき

佐々木・アインシュタイン多様体という.

更にトーリックなら
トーリック佐々木・アインシュタイン多様体.

これまでの２つの研究の流れ

これまでの２つの研究の流れ

1)　四元数ケーラー多様体に同伴する3-佐々木多様体（$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $C(S)$ が hyperKähler）からの興味
（Boyer-Galicki など）

これまでの２つの研究の流れ

1)　四元数ケーラー多様体に同伴する3-佐々木多様体（$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $C(S)$ が hyperKähler）からの興味
（Boyer-Galicki など）

正のケーラー・アインシュタイン計量の研究の進展，特異点のリンク
Multiplier Ideal Sheaf の応用(Boyer-Galicki-Kóllar など)$\cdots$
quasi-regular SE

これまでの２つの研究の流れ

1)　四元数ケーラー多様体に同伴する3-佐々木多様体（$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $C(S)$ が hyperKähler）からの興味
（Boyer-Galicki など）

正のケーラー・アインシュタイン計量の研究の進展，特異点のリンク Multiplier Ideal Sheaf の応用(Boyer-Galicki-Kóllar など)・・・ quasi-regular SE

2)　AdS-CFT 対応からの興味
（Martelli-Sparks-Yau など）··· irregular SE

AdS-CFT 対応とは？

AdS-CFT 対応とは？

$AdS_5 \times S_5$ 上の type IIB 超弦理論と

4 次元 $N = 1$ 超共形箙ゲージ理論が対応

するという予想

AdS-CFT 対応とは？

$AdS_5 \times S_5$ 上の type IIB 超弦理論と
4 次元 $N = 1$ 超共形箙ゲージ理論が対応
するという予想

ただし S_5 は5次元佐々木アインシュタイン多様体

AdS-CFT 対応とは?

$AdS_5 \times S_5$ 上の type IIB 超弦理論と
4 次元 $N = 1$ 超共形簸ゲージ理論が対応
するという予想

ただし S_5 は5次元佐々木アインシュタイン多様体

関連する話題

AdS-CFT 対応とは？

$AdS_5 \times S_5$ 上の type IIB 超弦理論と

4 次元 $N = 1$ 超共形箙ゲージ理論が対応

するという予想

ただし S_5 は５次元佐々木アインシュタイン多様体

関連する話題

Sasaki-Einstein 多様体の構成（橋本・大田・安井など）
anti-de Sitter Kerr black hole 解からの変形
brane tiling（植田・山崎など）

定理(F-小野-王, 趙-F-小野)

定理 (F-小野-王，趙-F-小野)

S をコンパクト，トーリック佐々木多様体とする．このとき

定理(F-小野-王，趙-F-小野)

S をコンパクト，トーリック佐々木多様体とする．このとき

S が佐々木・アインシュタイン計量を持つ

$\Longleftrightarrow$

$K^{\ell}_{C(S)}$ がある $\ell \in \mathbb{N}$ に対し自明

$\Longleftrightarrow$

S は，ある高さ $\ell \in \mathbb{N}$ のトーリック・ダイアグラムから作られる．

定理(F-小野-王，趙-F-小野)

S をコンパクト，トーリック佐々木多様体とする．このとき

S が佐々木・アインシュタイン計量を持つ

$\Longleftrightarrow$

$K^{\ell}_{C(S)}$ がある $\ell \in \mathbb{N}$ に対し自明

$\Longleftrightarrow$

S は，ある高さ $\ell \in \mathbb{N}$ のトーリック・ダイアグラムから作られる．

注: 5次元の場合は物理学者が可算個の例を構成してあった．（Gauntlet-Martelli-Sparks-Waldrum など）

系 各 $k \in \mathbb{N}$ に対し $\sharp^k(S^2 \times S^3)$ には可算無限個の変形非同値なトーリック佐々木アインシュタイン計量が存在する．

系 各 $k \in \mathbb{N}$ に対し $\sharp^k(S^2 \times S^3)$ には可算無限個の変形非同値なトーリック佐々木アインシュタイン計量が存在する.

注：トーリックでない場合は Boyer, Galicki, Nakamaye, Kóllar らにより知られていた(quasi-regular).

系　各 $k \in \mathbb{N}$ に対し $\sharp^k(S^2 \times S^3)$ には可算無限個の変形非同値なトーリック佐々木アインシュタイン計量が存在する.

注：トーリックでない場合は Boyer, Galicki, Nakamaye, Kóllar らにより知られていた(quasi-regular).

注：k が odd の場合は van Coevering が別の方法で構成していた.

(S, g) : (2m+1)次元**佐々木多様体**

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$C(S) = S \times \mathbb{R}_+$, $\overline{g} = dr^2 + r^2 g$ とする

錐多様体$(C(S), \overline{g})$ が **Kähler**.

$(\dim_{\mathbb{C}} C(S) = m + 1)$

(S, g) : (2m+1)次元**佐々木多様体**

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$C(S) = S \times \mathbb{R}_+$, $\overline{g} = dr^2 + r^2 g$ とする

錐多様体$(C(S), \overline{g})$ が **Kähler**.

$(\dim_{\mathbb{C}} C(S) = m + 1)$

$S \cong \{r = 1\}$ と同一視.

$$\tilde{\xi} = J(r\frac{\partial}{\partial r}),$$

$$\xi = J(r\frac{\partial}{\partial r})|_{r=1}$$ ： **Reeb ベクトル場**.

ξ の生成する S 上の flow ：**Reeb 流**.

$\tilde{\xi} = J(r\frac{\partial}{\partial r})$,

$\xi = J(r\frac{\partial}{\partial r})|_{r=1}$ ： **Reeb ベクトル場**.

ξ の生成する S 上の flow ：**Reeb 流**.

$\tilde{\xi} - iJ\tilde{\xi}$ は $C(S)$ 上の正則 flow を生成

$\tilde{\xi} = J(r\frac{\partial}{\partial r})$,

$\xi = J(r\frac{\partial}{\partial r})|_{r=1}$ ： **Reeb ベクトル場**.

ξ の生成する S 上の flow ：**Reeb 流**.

$\tilde{\xi} - iJ\tilde{\xi}$ は $C(S)$ 上の正則 flow を生成

$\tilde{\xi} - iJ\tilde{\xi}$ on $C(S)$ の正則 flow の局所軌道空間

$= \xi$ の Reeb 流の局所軌道空間

$\tilde{\xi} = J(r\frac{\partial}{\partial r})$,

$\xi = J(r\frac{\partial}{\partial r})|_{r=1}$: **Reeb ベクトル場**.

ξ の生成する S 上の flow ：**Reeb 流**.

$\tilde{\xi} - iJ\tilde{\xi}$ は $C(S)$ 上の正則 flow を生成

$\tilde{\xi} - iJ\tilde{\xi}$ on $C(S)$ の正則 flow の局所軌道空間

$=$ ξ の Reeb 流の局所軌道空間

よって Reeb 流 $=: \mathcal{F}_\xi$ on S は **横断正則構造** を持つ.

ξ の 双対 1-form η はS の接触形式.

つまり $\omega^T := d\eta$ は Ker $\eta \cong \nu(\mathcal{F}_\xi)$ 上非退化

ξ の 双対 1-form η はS の接触形式.

つまり $\omega^T := d\eta$ は Ker $\eta \cong \nu(\mathcal{F}_\xi)$ 上非退化

$\omega^T := d\eta$ は $\mathcal{F}_\xi$ に **横断 Kähler 構造**を与える.

つまり $\mathcal{F}_\xi$ の局所軌道空間に Kähler 構造を与える.

ξ の 双対 1-form η はS の接触形式.

つまり $\omega^T := d\eta$ は Ker $\eta \cong \nu(\mathcal{F}_\xi)$ 上非退化

$\omega^T := d\eta$ は $\mathcal{F}_\xi$ に **横断 Kähler 構造**を与える.

つまり $\mathcal{F}_\xi$ の局所軌道空間に Kähler 構造を与える.

S が Sasaki-Einstein
$\Longleftrightarrow$ $\mathcal{F}_\xi$ が横断的 Kähler-Einstein

典型例：

$(C(S), S, \text{leaf space}) = (\mathbb{C}^{m+1} - \{0\}, S^{2m+1}, \mathbb{CP}^m)$.

典型例：

$$(C(S), S, \text{leaf space}) = (\mathbb{C}^{m+1} - \{0\}, S^{2m+1}, \mathbb{CP}^m).$$

簡単な曲率の計算により

典型例：

$(C(S), S, \text{leaf space}) = (\mathbb{C}^{m+1} - \{0\}, S^{2m+1}, \mathbb{CP}^m)$.

簡単な曲率の計算により

$C(S)$ Ricci-flat Kähler

$\Longleftrightarrow$ S is Einstein

$\Longleftrightarrow$ local leaf spaces are positive Kähler-Einstein.

定義　佐々木計量 g が

横断 Kähler-Ricci ソリトンとは

$$\rho^T - \omega^T = L_X \omega^T$$

ただし ρ^T は ω^T の Ricci 形式,

X は “Hamilton 正則ベクトル場” .

定義　佐々木計量 g が

横断 Kähler-Ricci ソリトンとは

$$\rho^T - \omega^T = L_X \omega^T$$

ただし ρ^T は ω^T の Ricci 形式,

X は “Hamilton 正則ベクトル場” .

もし二木不変量が消える

$\Longrightarrow$

Kähler-Ricci ソリトンはKähler-Einstein 計量（$X = 0$）.

定義　佐々木計量 g が

横断 Kähler-Ricci ソリトンとは

$$\rho^T - \omega^T = L_X \omega^T$$

ただし ρ^T は ω^T の Ricci 形式,

X は “Hamilton 正則ベクトル場” .

もし二木不変量が消える

$\Longrightarrow$

Kähler-Ricci ソリトンはKähler-Einstein 計量（$X = 0$）.

佐々木の横断 Kähler 幾何でも同様.

定理 (F-小野-王)

S をコンパクト，トーリック佐々木多様体で

$c_1^B > 0$ かつ $c_1(\nu(\mathcal{F}_\xi)) = 0$ とすると，

横断 Kähler-Ricci ソリトンが存在する．

定理 (F-小野-王)

S をコンパクト，トーリック佐々木多様体で

$c_1^B > 0$ かつ $c_1(\nu(\mathcal{F}_\xi)) = 0$ とすると，

横断 Kähler-Ricci ソリトンが存在する．

更に Reeb ベクトル場 ξ をトーラスの Lie 環内で傾けていくと，

佐々木版二木不変量が消えるようにできる．

定理 (F-小野-王)

S をコンパクト，トーリック佐々木多様体で

$c_1^B > 0$ かつ $c_1(\nu(\mathcal{F}_\xi)) = 0$ とすると，

横断 Kähler-Ricci ソリトンが存在する．

更に Reeb ベクトル場 ξ をトーラスの Lie 環内で傾けていくと，
佐々木版二木不変量が消えるようにできる．

(Z-minimization or a-maximization in AdS-CFT correspondence by Martelli-Saprks-Yau)

$T^\ell =$ maximal torus of Aut$(C(S))$ とする.

$T^\ell =$ maximal torus of Aut$(C(S))$ とする.

$\ell = 1$ なら S は Kähler orbifold 上の S^1-orbibundle. Reeb 場の変形の余地はない. 佐々木アインシュタイン計量の存在はKähler-Einstein orbifold 計量の存在問題と同じ.

$T^\ell =$ maximal torus of Aut($C(S)$) とする.

$\ell = 1$ なら S は Kähler orbifold 上の S^1-orbibundle. Reeb 場の変形の余地はない. 佐々木アインシュタイン計量の存在はKähler-Einstein orbifold 計量の存在問題と同じ.

$\ell = m + 1$ ならトーリックなので，常に佐々木アインシュタイン計量は存在する.

$T^\ell =$ maximal torus of Aut$(C(S))$ とする.

$\ell = 1$ なら S は Kähler orbifold 上の S^1-orbibundle. Reeb 場の変形の余地はない. 佐々木アインシュタイン計量の存在はKähler-Einstein orbifold 計量の存在問題と同じ.

$\ell = m + 1$ ならトーリックなので, 常に佐々木アインシュタイン計量は存在する.

問題　$1 < \ell < m + 1$ のときはどうのような予想が妥当か？

3. K-安定性の解説（Tian, Donaldson による）

3. K-安定性の解説（Tian, Donaldson による）

$\Lambda \to N$ を n 次元射影スキーム N 上の豊富な直線束とする．Λ には束同型としての $\mathbb{C}^*$-作用があり，この作用は N への $\mathbb{C}^*$-作用を誘導するものとする.

3. K-安定性の解説（Tian, Donaldson による）

$\Lambda \to N$ を n 次元射影スキーム N 上の豊富な直線束とする．Λ には束同型としての $\mathbb{C}^*$-作用があり，この作用は N への$\mathbb{C}^*$-作用を誘導するものとする.

このとき任意の正の整数 k に対し，$W_k = H^0(N, \Lambda^k)$ への $\mathbb{C}^*$-作用が誘導される.

3．K-安定性の解説（Tian，Donaldson による）

$\Lambda \to N$ を n 次元射影スキーム N 上の豊富な直線束とする．Λ には束同型としての $\mathbb{C}^*$-作用があり，この作用は N への $\mathbb{C}^*$-作用を誘導するものとする．

このとき任意の正の整数 k に対し，$W_k = H^0(N, \Lambda^k)$ への $\mathbb{C}^*$-作用が誘導される．

$d_k = \dim W_k$ とおき，w_k を $\wedge^{d_k} W_k$ への $\mathbb{C}^*$-作用のウェイトとする．

3. K-安定性の解説（Tian，Donaldson による）

$\Lambda \to N$ を n 次元射影スキーム N 上の豊富な直線束とする．Λ には束同型としての $\mathbb{C}^*$-作用があり，この作用は N への $\mathbb{C}^*$-作用を誘導するものとする．

このとき任意の正の整数 k に対し，$W_k = H^0(N, \Lambda^k)$ への $\mathbb{C}^*$-作用が誘導される．

$d_k = \dim W_k$ とおき，w_k を $\wedge^{d_k} W_k$ への $\mathbb{C}^*$-作用のウェイトとする．

Riemann-Roch および同変 Riemann-Roch の定理により d_k と w_k はそれぞれ次数 n および $n+1$ の k を変数とする多項式になる．

従って，w_k/kd_k は k が無限大に近づくとき有界であり，十分大きい k に対し

$$\frac{w_k}{kd_k} = F_0 + F_1 k^{-1} + F_2 k^{-2} + \cdots$$

と展開することができる．

従って，w_k/kd_k は k が無限大に近づくとき有界であり，十分大きい k に対し

$$\frac{w_k}{kd_k} = F_0 + F_1k^{-1} + F_2k^{-2} + \cdots$$

と展開することができる．

補題(Donaldson)　F_1 の定義において，もし N が非特異射影多様体であるならば

$$F_1 = \frac{-1}{2vol(N,\omega)}f(X)$$

が成立する．ただし X は $\mathbb{C}^*$-作用の無限小生成元.

従って，w_k/kd_k は k が無限大に近づくとき有界であり，十分大きい k に対し

$$\frac{w_k}{kd_k} = F_0 + F_1 k^{-1} + F_2 k^{-2} + \cdots$$

と展開することができる.

補題(Donaldson)　F_1 の定義において，もし N が非特異射影多様体であるならば

$$F_1 = \frac{-1}{2vol(N,\omega)} f(X)$$

が成立する．ただし X は $\mathbb{C}$*-作用の無限小生成元.

定義 F_1 を **Donaldson-Futaki invariant** という.

従って，w_k/kd_k は k が無限大に近づくとき有界であり，十分大きい k に対し

$$\frac{w_k}{kd_k} = F_0 + F_1 k^{-1} + F_2 k^{-2} + \cdots$$

と展開することができる.

補題(Donaldson)　F_1 の定義において，もし N が非特異射影多様体であるならば

$$F_1 = \frac{-1}{2vol(N,\omega)} f(X)$$

が成立する．ただし X は $\mathbb{C}$*-作用の無限小生成元.

定義 F_1 を **Donaldson-Futaki invariant** という.

（満渕：F_i 達は Chow ノルムの微分の漸近展開からも得られる.）

F_1 を不変量として数値的判定法の考え方を apply したい．

F_1 **を不変量として数値的判定法の考え方を apply したい.**

射影多様体 M とその上の豊富な直線束 L に対し，指数 r の**テスト配位(test configuration)**とは次のものからなる.

F_1 を不変量として数値的判定法の考え方を apply したい．

射影多様体 M とその上の豊富な直線束 L に対し，指数 r の**テスト配位(test configuration)**とは次のものからなる．

(1)　固有かつ平坦なスキームの射 $\pi : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$;

F_1 を不変量として数値的判定法の考え方を apply したい．

射影多様体 M とその上の豊富な直線束 L に対し，指数 r の**テスト配位(test configuration)**とは次のものからなる．

(1) 固有かつ平坦なスキームの射 $\pi : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$;

(2) $\mathcal{M}$ への $\mathbb{C}^*$-作用で $\mathbb{C}$ への通常の $\mathbb{C}^*$-作用を覆うもの;

F_1 を不変量として数値的判定法の考え方を apply したい．

射影多様体 M とその上の豊富な直線束 L に対し，指数 r の**テスト配位(test configuration)**とは次のものからなる．

(1)　固有かつ平坦なスキームの射 $\pi : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$;

(2)　$\mathcal{M}$ への $\mathbb{C}^*$-作用で $\mathbb{C}$ への通常の $\mathbb{C}^*$-作用を覆うもの;

(3)　$\mathbb{C}^*$-同変直線束 $\mathcal{L} \to \mathcal{M}$;

F_1 を不変量として数値的判定法の考え方を apply したい．

射影多様体 M とその上の豊富な直線束 L に対し，指数 r の**テスト配位(test configuration)**とは次のものからなる.

(1)　固有かつ平坦なスキームの射 $\pi : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$;

(2)　$\mathcal{M}$ への $\mathbb{C}^*$-作用で $\mathbb{C}$ への通常の $\mathbb{C}^*$-作用を覆うもの;

(3)　$\mathbb{C}^*$-同変直線束 $\mathcal{L} \to \mathcal{M}$;

(4)　$t \neq 0$ に対し $M_t = \pi^{-1}(t) \cong M$ かつ $(M_t, \mathcal{L}|_{M_t}) \cong (M, L^r)$.

F_1 を不変量として数値的判定法の考え方を apply したい．

射影多様体 M とその上の豊富な直線束 L に対し，指数 r の**テスト配位(test configuration)**とは次のものからなる．

(1) 固有かつ平坦なスキームの射 $\pi : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$;

(2) $\mathcal{M}$ への $\mathbb{C}^*$-作用で $\mathbb{C}$ への通常の $\mathbb{C}^*$-作用を覆うもの;

(3) $\mathbb{C}^*$-同変直線束 $\mathcal{L} \to \mathcal{M}$;

(4) $t \neq 0$ に対し $M_t = \pi^{-1}(t) \cong M$ かつ $(M_t, \mathcal{L}|_{M_t}) \cong (M, L^r)$.

$\mathbb{C}^*$-作用は中心ファイバー $L_0 \to M_0 = \pi^{-1}(0)$ への $\mathbb{C}^*$-作用を誘導する．よって (M_0, L_0) **の F_1 を考えることができる**.

もし (M, L) が $\mathbb{C}^*$-作用を持てば，直積 $L \times \mathbb{C} \to M \times \mathbb{C}$ が自然にテスト配位を与える．これを**直積配位**という.

もし(M, L) が $\mathbb{C}^*$-作用を持てば，直積 $L \times \mathbb{C} \to M \times \mathbb{C}$ が自然にテスト配位を与える．これを**直積配位**という.

直積配位において $\mathbb{C}^*$ が M に自明に作用するとき，この配位は自明な配位であるという.

もし(M, L) が $\mathbb{C}^*$-作用を持てば，直積 $L \times \mathbb{C} \to M \times \mathbb{C}$ が自然にテスト配位を与える．これを**直積配位**という.

直積配位において $\mathbb{C}^*$ が M に自明に作用するとき，この配位は自明な配位であるという.

定義 3　(M, L) が **K 半安定**（または **K 安定**）であるとは，任意の自明でないテスト配位に対し中心ファイバー (M_0, L_0) の F_1 が非正（または負）であるときをいう．(M, L) が **K polystable**であるとは，(M, L) は*K* 半安定であり，更に等号が成立するのはテスト配位が直積配位であるときに限るときをいう.

予想(Yau-Tian-Donaldson)： (M, L) を偏極多様体とする．Kähler 類 $c_1(L)$ に定スカラー Kähler 計量が存在するための必要十分条件は (M, L) が K polystableであることであろう．

予想(Yau-Tian-Donaldson)：(M, L) を偏極多様体とする．Kähler 類 $c_1(L)$ に定スカラー Kähler 計量が存在するための必要十分条件は (M, L) が K polystableであることであろう.

この予想の必要性の証明は既に得られている（Chen-Tian，Donaldson，Stoppa，満渕）.

予想(Yau-Tian-Donaldson)：(M, L) を偏極多様体とする．Kähler 類 $c_1(L)$ に定スカラー Kähler 計量が存在するための必要十分条件は (M, L) が K polystableであることであろう.

この予想の必要性の証明は既に得られている（Chen-Tian，Donaldson，Stoppa，満渕）.

Tian による満渕 energy の振る舞いに関する解析が上の予想の根拠になっている.

4. トーリック佐々木・アインシュタイン多様体（続き）

定理 (F-小野-王)

S をコンパクト，トーリック佐々木多様体で

$c_1^B > 0$ かつ $c_1(D) = 0$ とすると，

佐々木構造を変形することにより

佐々木・アインシュタイン計量を得る．

例：
$M = \mathbb{CP}^2$ の1点または2点 blow-up
$S = K_M$ の同伴 S^1-束
S は佐々木・アインシュタイン計量を持つ．

$c_1^B > 0$ かつ $c_1(D) = 0$ とはどのような条件か？

定理(趙-F-小野)　S コンパクト，トーリック佐々木多様体で $\dim S \geq 5$ とする．$C(S)$ を頂点を含めた解析空間と見たとき次の 3 つは同値である．

(a)　$c_1^B > 0$ かつ $c_1(D) = 0$.
(b)　ある $\ell \in \mathbb{N}$ に対し $K_{C(S)}^{\ell}$ は自明.
(c)　佐々木多様体 S はある高さ $\ell \in \mathbb{N}$ のトーリック・ダイアグラムから作られる.

$G = T^{m+1}$. $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$.

$\mathfrak{g}^*$ the dual of $\mathfrak{g}$.

$\mathbb{Z}_{\mathfrak{g}}$ を $\mathfrak{g}$ の格子とする,

i.e. kernel of $\exp : \mathfrak{g} \to G$.

定義 $\mathfrak{g}^*$ 内の空でない内部をもつ rational polyhedral cone が **good**

$\Longleftrightarrow$

頂点以外の face では滑らかなトーリック多様体を定める.

定義： 高さ ℓ の $(m+1)$-次元トーリック・ダイアグラムとは

good rational convex polyhedral cone を与える

$\lambda_i \in \mathbb{Z}^{m+1} \cong \mathbb{Z}_{\mathfrak{g}}$ と

$$\gamma = (\frac{a_0}{b_0}, \cdots, \frac{a_m}{b_m}) \in \mathbb{Q}^{m+1} \cong (\mathbb{Q}_{\mathfrak{g}})^*$$

の集まりで次をみたすもの：

(a) $a_i \in \mathbb{Z}$ と $b_i \in \mathbb{Z}_+$ は互いに素;
(b) $b_0, \cdots, b_m$ の最小公倍数は ℓ;
(c) $\langle \gamma, \lambda_i \rangle = -1$.

good rational polyhedral cone C に対し上の (a), (b) and (c) をみたす有理ベクトルγ が存在するとき，C は高さ ℓ のトーリック・ダイアグラムであるという.

"height ℓ" という用語を使う理由：

$SL(m+1,\mathbb{Z})$ の適当な元を用いて変換して

$$\gamma = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\ell} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

という形にできるが，このとき各 λ_i は

$$\lambda_j = \begin{pmatrix} \ell \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Fact

$$C_0^* = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \langle v, \xi \rangle > 0 \text{ for all } v \in C\}$$

とおく.
good rational polyhedral cone C と
$\xi \in C_0^*$ に対し,
モーメント像が $C \backslash \{0\}$ になり,
Reeb ベクトル場が ξ になるような
トーリック佐々木多様体がに存在.
（計量の取り方に ambiguity が残る）

$\mathcal{L}$ を $\lambda_1, \cdots, \lambda_d$ により生成される $\mathbb{Z}_{\mathfrak{g}}$ の部分群とすると,

$$\pi_1(S) \cong \mathbb{Z}_{\mathfrak{g}}/\mathcal{L}.$$

$\ell > 1$ なら $\mathbb{Z}_{\mathfrak{g}}/\mathcal{L} \neq \{0\}$

定理 S を高さ $\ell > 1$ のトーリック・ダイアグラムに同伴する連結なトーリック佐々木多様体とすると, S は単連結でない.

逆は正しくない.

例：

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

このとき $\pi_1(S) = \mathbb{Z}_5$.