KÄHLER および佐々木・EINSTEIN 多様体に関する最近の進展

二木 昭人

Abstract. この講演では，Kähler-Einstein 計量の存在問題と GIT 安定性の同値性に関する最近の結果について報告し，更に佐々木・Einstein 計量の存在問題に関する最近の進展について報告する．あらましは以下の通りである．

スカラー曲率一定 Kähler 計量を持ち，自己同型群が離散的なコンパクト偏極多様体は漸近的チャウ安定であることが知られている（S.K. Donaldson，2001）．自己同型群が離散的でない場合はこれが成り立たない例，すなわち，漸近的半安定でないトーリック Fano Kähler-Einstein 多様体が存在することがわかった（小野-佐野-四ツ谷, Nill-Paffenholz, 2009）．一般には K 安定性と呼ばれる条件がスカラー曲率一定 Kähler 計量を持つための必要十分条件と予想されている．

佐々木・アインシュタイン計量の存在は AdS/CFT 対応の研究で注目されている．トーリック佐々木多様体の場合は，佐々木・アインシュタイン計量をもつものを完全に記述できる．

1. はじめに

複素多様体 M に Hermite 計量 g を与える．$z^1, \cdots, z^m$ を局所正則座標とすると g は

$$g_{i\bar{j}} := g(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}^j})$$

とおくことにより，正値 Hermite 行列 $(g_{i\bar{j}})$ で表現される． Hermite 行列の実部は Riemann 計量を定める．Hermite 計量を用いた調和積分論は調和形式全体と Dolbeault cohomology との同型を与え， Riemann 計量を用いた調和積分論は調和形式全体と de Rham cohomology との同型を与える．両方の調和形式が同型となるための条件が次のように述べられる．実 2 次微分形式

$$\omega_g := i \sum_{i,j=1}^{m} g_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\overline{z}^j$$

は閉形式である：

$$d\omega_g = 0.$$

このとき， Hermite 計量は Kähler 計量であるといい，ω_g は g の Kähler 形式であるという．$d\omega_g = 0$ は Kähler condition と呼ばれる．要するに Kähler 計量とは複素幾何と実 Riemann 幾何双方に相性がよく，一方から他方への橋渡しを可能にする計量である．Kähler 計量を持つ複素多様体を Kähler 多様体という．Kähler 計量 g に対し，

$$\mathrm{Ric}(g)_{i\bar{j}} = -\frac{\partial^2}{\partial z^i \partial \overline{z}^j} \log\det(g_{k\bar{\ell}}) \tag{1}$$

Date: 2009 年 8 月.

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 53C55, Secondary 53C21, 55N91 .

Key words and phrases. Kähler-Einstein metric, Sasaki manifold, Chow stability, toric Fano manifold.

により与えられる 2 階のテンソルを Ricci 曲率という．特性類の理論（Chern-Weil 理論）によれば第 1 Chern 類 $c_1(M)$ は

$$\rho_g := \frac{i}{2\pi}\mathrm{Ric}(g)_{i\bar{j}}dz^i \wedge d\bar{z}^j = -\frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log\det(g_{k\bar{\ell}}) \tag{2}$$

により代表される．その意味で ρ_g は Ricci 形式とも，第 1 Chern 形式とも呼ばれる．

さて表題の Einstein 多様体とは Ricci 曲率が Riemann 計量と比例するような Riemann 多様体のことである．このとき，計量は Einstein 計量と呼ばれる．物理的意味合いとしては重力場のみたすべき条件を正定値計量の場合に書いたものといえる．問題はどのような多様体が Einstein 計量を持つか，どのような多様体が宇宙となりうるかである．複素多様体である Kähler 多様体の場合は，

$$2\pi\rho_g = c\omega_g$$

なる実数 c が存在することが Einstein 計量の定義となる．この場合は Kähler-Einstein 計量であるといわれる．比例例数 c が正の場合，$c_1(M)$ は Kähler 形式で代表されるので，正の閉形式で代表される．この場合，$c_1(M) > 0$ という記号で表現されることが多い．このようなコンパクト複素多様体は Fano 多様体と呼ばれる．また,「反標準束 K_M^{-1} は豊富である」，または「$c_1(M)$ は正である」などとも言い表される．$c = 0$ の場合，$c < 0$ の場合も同様に $c_1(M) = 0$ および $c_1(M) < 0$ という記号で表される．いうまでもなく，前者は $\mathbb{R}$-係数コホモロジーとしての第 1 Chern 類が 0 という意味で，後者は $c_1(M)$ がある Kähler 形式の -1 倍で代表されるという意味である．明らかにこれらは Kähler-Eisntein 計量が存在するための必要条件である.（任意のコンパクト複素多様体がこの 3 つのどれかの条件をみたすわけではない．この 3 つのどれでもない複素多様体はたくさんある.）逆に十分条件にもなるかというのが Calabi の問題である． $c = 0$ および $c < 0$ の場合はそれぞれ，$c_1(M) = 0$ および $c_1(M) < 0$ が Kähler-Eisntein 計量が存在するための必要十分であることが 1970 年代に証明されている．$c_1(M) = 0$ の場合は Yau ([29])，$c_1(M) < 0$ の場合は Aubin ([1]) および Yau ([29]) による．

残る $c > 0$ の場合は $c_1(M) > 0$ だけでは十分ではないことを示す障害がいくつか知られており，まだ完全な理解に至っていない．$c_1(M) > 0$ の場合の Kähler-Einstein 計量の存在の障害としては，早い時期から知られている松島与三 ([22]) や筆者により与えられた障害 ([12]) の他，GIT 安定性から来る障害があることが知られている． 実際，松島与三 ([22]) によればコンパクトな Kähler-Einstein 多様体の正則ベクトル場全体のなす複素 Lie 環 $\mathfrak{h}(M)$ は簡約可能 (reductive) である．また筆者の結果 [12] によると，ある Lie 環準同型 $f : \mathfrak{h}(M) \to \mathbb{C}$ （二木不変量と呼ばれるもの）が存在して，もし M が Kähler-Einstein 計量を許すならば $f = 0$ となる．したがって，この 2 つの結果は Kähler-Einstein 計量が存在するための障害を与える．一方，GIT とは Geometric Invariant Theory の略であるが，ある種の GIT 安定性が障害になることが知られており，また必要十分条件と予想されている条件も GIT 安定性の変種である．本講演の第一の目的は $c_1(M) > 0$ の場合の Kähler-Eisntein 計量 の存在と GIT 安定性との関係について最近得られた結果と，目標とされている予想を紹介することである．

第二の目的は佐々木-Einstein 計量の存在問題について論ずることである．佐々木-Einstein 計量は超弦理論の AdS/CFT 対応で重要な役割を果たすもので，近年物理でも数学でも研究されている対象である．佐々木多様体とは接触構造を持つ Riemann 多様体の一種で，従って奇数次元である．佐々木多様体の正確な定義は次のように述べられる．奇数次元 Riemann 多様体 (S, g) が佐々木多様体であるとはその錐多様体 $(C(S) := \mathbb{R}_+ \times S, dr^2 + r^2g)$ が Kähler 多様体であることである．ここに r は $\mathbb{R}_+$ の座標を表す．このとき S は部分多様体 $\{r = 1\}$ と同一視され，この同一視に

より $d^c \log r$ が接触構造を S に与える．接触構造から決まる Reeb ベクトル場は横断的 Kähler 葉層構造を定める．これは，Reeb ベクトル場の生成する flow の局所的軌道空間が Kähler 構造を持ち，自然な貼り合わせが等長的双正則写像でなされるという意味である．佐々木多様体が Einstein 多様体であれば必然的に正の Ricci 曲率を持ち，したがって多様体は完備ならコンパクトである．更に，横断的 Kähler 構造も正の Kähler-Einstein 計量を持つ．M を Fano 多様体とし，S を M の標準直線束の同伴 $U(1)$-束の全空間とすると S は佐々木多様体になる．M の正則ベクトル場が 0 しか存在しない場合，S に佐々木-Einstein 計量を見つけることは M に Kähler-Einstein 計量を見つけることと全く同じになる．したがって，この場合，安定性が関係してくることは明らかである．しかし，M が自明でないトーラス作用を許容すれば，Reeb ベクトル場の変形にともなう佐々木構造の変形があるため，佐々木-Einstein 計量が存在しうる余地が大きくなる．実際，筆者らは $(m+1)$ 次元トーラスの作用を許す $(2m+1)$ 次元佐々木多様体で "高さ一定のトーリックダイアグラム" で記述されるものは佐々木-Einstein 計量を持つことを証明した ([17], [7])．ここで，$(m+1)$ 次元トーラスの作用を許す $(2m+1)$ 次元佐々木多様体を考えることは，錐多様体 $C(S)$ が通常の意味のトーリック多様体であるということと同じであることに注意しよう．すると，"高さ一定のトーリックダイアグラム" で記述されるという意味は，$C(S)$ を与える fan のすべての生成元が第１座標を一定に取れるということと同じである．つまり，第１座標を高さと見なし，それを一定にとることができるという意味である．これは $C(S)$ の頂点が $\mathbb{Q}$-Gorenstein 特異点であるということと同値である．特にトーリック Fano 多様体の標準直線束に同伴する $U(1)$-束の全空間は佐々木-Einstein 計量を持つ．このことを応用すると任意の自然数 k に対し，$S^2 \times S^3$ を k 個連結和をとった５次元多様体 $k(S^2 \times S^3)$ は可算無限個の変形同値でないトーリック佐々木-Einstein 計量を持つことが証明できる ([7])．

2. スカラー曲率一定 Kähler 計量の存在と漸近的 Chow 安定性および K 安定性

Kähler-Einstein 計量と GIT 安定性の関係を論ずるのがこの節の目的であるが，実は，GIT 安定性と相性が良いのは Kähler-Einstein 計量を特別な場合として含むスカラー曲率一定 Kähler 計量である．スカラー曲率 σ は

$$\sigma = \sum_{i,j=1}^{m} g^{i\bar{j}} \mathrm{Ric}(g)_{i\bar{j}}$$

により定義される．ここに $(g^{i\bar{j}})$ は $(g_{i\bar{j}})$ の逆行列である．Einstein すなわち $\mathrm{Ric}(g)_{i\bar{j}}$ が $g_{i\bar{j}}$ と定数倍で比例する場合は σ が一定であるのは明らかである．

安定性との関連性を論ずる場合は Kähler 形式 ω は整コホモロジー類に属し，ある複素直線束 L の第１ Chern 類を代表する場合を考える．このとき，ω は L のある接続の曲率形式の $i/2\pi$ 倍となる．

コンパクト複素多様体 M 上の複素直線束（ファイバーが１次元のベクトル束）$L \to M$ に対し，$c_1(L)$ が Kähler 形式で代表される場合を考えよう．このような直線束は豊富（ample）であると言われ，高次のテンソル積を取った L^k に対し，L^k の正則切断全体のなすベクトル空間 $H^0(M, L^k)$ の双対空間に M を埋め込むことができる（小平埋め込み定理）．

$V_k := H^0(M, L^k)^*$ とおく．$\Phi_{|L^k|} : M \to \mathbb{P}(V_k)$ を L^k による小平埋め込みとし，その次数を d とする．$m+1$ 個の $\mathbb{P}(V_k^*)$ の直積 $\mathbb{P}(V_k^*) \times \cdots \times \mathbb{P}(V_k^*)$ は $m+1$ 個の $\mathbb{P}(V_k)$ の超平面 $H_1, \cdots, H_{m+1}$ を定める．$H_1 \cap \cdots \cap H_{m+1} \cap M$ が空でないような $m+1$ 個の超平面 $H_1, \cdots, H_{m+1}$ の組全体は $\mathbb{P}(V_k^*) \times \cdots \times \mathbb{P}(V_k^*)$ の因子を定める．しかし M の次数は d であるからこの因子は $\hat{M}_k \in (Sym^d(V_k))^{\otimes m+1}$ により与えられ

る．もちろん $\hat{M}_k$ は定数倍を除いて一意的に決まる．点 $[\hat{M}_k] \in \mathbb{P}((Sym^d(V_k))^{\otimes m+1})$ を (M, L^k) の **Chow 点** と呼ぶ．$(Sym^d(V_k))^{\otimes m+1}$ への $SL(V_k)$ の作用に関し $\hat{M}_k$ が安定（半安定）のとき，M は L^k に関し **Chow 安定（半安定）である**という．ここに $SL(V_k)$ の作用に関し $\hat{M}_k$ が安定とは，その軌道が閉集合であり，固定部分群が有限群であるときをいう．また $SL(V_k)$ の作用に関し $\hat{M}_k$ が半安定であるとは，その軌道の閉包が 0 を含まないときをいう．

ある $k_0 > 0$ が存在して，任意の $k \geq k_0$ に対し，$\hat{M}_k$ が安定であるとき，偏極多様体 (M, L) は**漸近的に Chow 安定**であるという．漸近的に Chow 半安定であることも同様に定義される．

次に，$c_1(L)$ は Kähler 形式の空間とみなし，この中にスカラー曲率一定計量が存在するかどうかを考える．すなわち，Kähler form ω を一つ固定し，ω とコホモロガスな Kähler 形式

$$\widetilde{\omega} = \omega + i\partial\overline{\partial}\varphi, \qquad \varphi \in C^\infty(M)$$

でスカラー曲率一定なものを見いだすことができるのはいつかを調べるのである．

漸近的安定性と定スカラー曲率 Kähler 計量の存在については，Donaldson の次のような結果が知られている．

定理 2.1 (Donaldson, [9] 2001)**.** Aut(M, L) は離散群であるとする．もし $2\pi c_1(L)$ に属するスカラー曲率一定の *Kähler* 形式が存在するならば，(M, L) は漸近的に *Chow* 安定である．

この定理における Aut(M, L) は離散群であるという仮定は安定性の定義における固定部分群が有限群という仮定にあたる．

Aut(M, L) は離散群でない場合，満渕俊樹は漸近的 Chow 半安定であるための障害があることを見いだした（[19]）．更に，この障害が消えているとき，スカラー曲率一定ケーラー計量が $c_1(L)$ に存在するならば漸近的に polystable，つまり任意の k に対し $SL(V_k)$-作用による $\hat{M}_k$ 軌道が閉集合，であることを証明した（[20]）．

筆者は [14] において，[19] において得られた満渕の障害をいくつかの積分不変量の消滅という形に書き直した．以下はこれの解説である．

M の正則ベクトル場全体のなす複素 Lie 環 を $\mathfrak{h}(M)$ により表し，

$$\mathfrak{h}_0(M) = \{X \in \mathfrak{h}(M) \,|\, X \text{ は零点を持つ }\}$$

とおく．このとき， $X \in \mathfrak{h}_0(M)$ に対し滑らかな複素数値関数 u_X で

$$i(X)\omega = -\overline{\partial} u_X \tag{3}$$

をみたすものが一意的に存在することが知られている．この意味で $\mathfrak{h}_0(M)$ は正則 Hamilton ベクトル場全体と一致する．Hamilton 関数 u_X は常に

$$\int_M u_X \, \omega^m = 0 \tag{4}$$

と正規化しておくことにする．

次に M の正則接束　$T'M$ の (1.0)-型接続 ∇ を一つ取る．つまり，∇ の接続形式が $(1,0)$-型であるように取るのである．更に滑らかな $(1,0)$-型ベクトル場 X に対し

$$L(X) = \nabla_X - L_X$$

とおく．ここに L_X は Lie 微分を表す．$L(X)$ は $End(T'M)$ の滑らかな切断を定める．

$\phi \in I^k(GL(m,\mathbb{C}))$ に対し，

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\phi(X) &= (m-k+1)\int_M \phi(\Theta)\wedge u_X\,\omega^{m-k} \\ &\quad + \int_M \phi(L(X)+\Theta)\wedge\omega^{m-k+1} \end{aligned} \tag{5}$$

とおく．

命題 2.2 ([14])．　*$\mathcal{F}_\phi(X)$ は M の Kähler 形式 $\omega \in c_1(L)$ の選び方にも，$T'M$ の $(1,0)$-型接続形式 ∇ の選び方にもよらない．*

定理 2.3 ([14])．　*もし偏極多様体 (M,L) が漸近的に Chow 半安定ならば，$1 \le \ell \le m$ に対し*

$$\mathcal{F}_{Td^{(\ell)}}(X) = 0 \tag{6}$$

*が成立する．*特に $\ell = 1$ の場合は第 1 節に述べた（一般化された）二木不変量 $f : \mathfrak{h}(M) \to \mathbb{C}$ が消えることを意味する（以下の注意を参照のこと）．

注意 2.4. (a)　$\mathrm{Td}^1 = \frac{1}{2}c_1$ であり c_1 はトレイスなので

$$\mathcal{F}_{\mathrm{Td}^1}(X) = \frac{m}{2}\int_M S u_X \omega^m \tag{7}$$

となる．ここに S は *Kähler* 形式 ω のスカラー曲率である．これはスカラー曲率一定 *Kähler* 計量が存在するための障害になる．なぜならもし S が定数ならば正規化条件 *(4)* により $\mathcal{F}_{\mathrm{Td}^1}(X) = 0$ となるからである．これが *Kähler-Einstein* 計量の存在の障害として [12] で定義された f と一致することは次のようにして確かめられる．F を

$$S - \int_M S\omega^m \Big/ \int_M \omega^m = \Delta F$$

をみたす M 上の滑らかな関数とすると，

$$f(X) = -\int_M S\,u_X\,\omega^m = -\int_M \Delta F\,u_X\,\omega^m = \int_M XF\ \omega^m$$

となるから，これは [12] で定義された f と一致する．
(b)　M を *Fano* 多様体，ρ_ω を $\omega \in c_1(M)$ の *Ricci* 形式とすると

$$f(X) = \frac{1}{(m+1)}\mathcal{F}_{c_1^{m+1}}(X) = \frac{1}{(m+1)}\int_M \Delta u_X \rho_\omega^m$$

となる．これの証明は [13], *(5.2.1)* にある．

論文 [16] において，小野肇，佐野友二と筆者はトーリック Fano 多様体の場合，$\mathcal{F}_{Td^{(\ell)}}$ が Hilbert series の微分で書けることを示した．この研究では，３次元までのトーリック Fano 多様体では $\mathcal{F}_{Td^{(\ell)}}$ が２次元以上を張る例があることは確認できるものの，$\mathcal{F}_{Td^1} = 0$ であるが，ある $\ell \ge 2$ に対し，$\mathcal{F}_{Td^{(\ell)}} \ne 0$ なる例は存在しないことがわかった．さらにそのような例を見つけるには，Batyrev-Selivanova [2] の意味で対称でないが，$\mathcal{F}_{Td^1} = 0$ なる例を見つける必要があることがわかる．ここにトーリック Fano 多様体が Batyrev-Selivanova の意味で対称であるとは，$\mathrm{Aut}(M)$ における極大トーラスの Weyl 群による代数的指標全体のなすベクトル空間への作用の不動点集合が 0 のみからなるときをいう．なぜなら，$\mathcal{F}_{Td^{(\ell)}}$ は Weyl 群の作用で不変であるから，対称ならすべての $\mathcal{F}_{Td^{(\ell)}}$ は 0 となるからである．

このあと，Batyrev-Selivanova [2] の意味で対称でないが，$\mathcal{F}_{Td^1} = 0$ なる 7 次元トーリック Fano 多様体の例が Nill-Paffenholz [24] により見いだされた．小野肇・佐

野友二・四ツ谷直仁 [25] は Nill-Paffenholz の例においては，$\ell \geq 2$ に対し $\mathcal{F}_{Td^{(\ell)}} \neq 0$ となることを示した．以上により．次の定理を得る．

定理 2.5 ([25])**.** 漸近的 *Chow* 半安定でない *Kähler-Einstein* トーリック *Fano* 多様体が存在する．

論文 [27] において Tian は，Fano 多様体に対し K 安定性の概念を導入し，もし Fano 多様体が Kähler-Einstein 計量を持つならば M は "弱 K 安定" であることを証明した．Tian の K 安定性は M の特異正規多様体への退化を考え，安定性を量る指数として f の定義を特異正規多様体にまで拡張した不変量（[8]）を用いるものであった．[10] において Donaldson は不変量 f を一般の射影スキームに代数的に定義し直し，(M, L) に対する K 安定性の概念も定義し直した．以下，Donaldson による K 安定性の定義を紹介する．

$\Lambda \to N$ を n 次元射影スキーム上の豊富な直線束とする．Λ には束同型としての $\mathbb{C}^*$-作用があり，この作用は N への $\mathbb{C}^*$-作用を誘導するものとする．このとき任意の正の整数 k に対し，$W_k = H^0(N, \Lambda^k)$ への $\mathbb{C}^*$-作用が誘導される．$d_k = \dim W_k$ とおき，w_k を $\wedge^{d_k} W_k$ への $\mathbb{C}^*$-作用のウェイトとする．Riemann-Roch および同変 Riemann-Roch の定理により d_k と w_k はそれぞれ次数 n および $n+1$ の k を変数とする多項式になる．従って，w_k/kd_k は k が無限大に近づくとき有界であり，十分大きい k に対し

$$\frac{w_k}{kd_k} = F_0 + F_1 k^{-1} + F_2 k^{-2} + \cdots$$

と展開することができる．

射影多様体 M とその上の豊富な直線束 L に対し，指数 r の**テスト配位**とは次のものからなる．

(1) 固有かつ平坦なスキームの射 $\pi : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$;

(2) $\mathcal{M}$ への $\mathbb{C}^*$-作用で $\mathbb{C}$ への通常の $\mathbb{C}^*$-作用を覆うもの;

(3) $\mathbb{C}^*$-同変直線束 $\mathcal{L} \to \mathcal{M}$;

(4) $t \neq 0$ に対し $M_t = \pi^{-1}(t) \cong M$ かつ $(M_t, \mathcal{L}|_{M_t}) \cong (M, L^r)$.

この定義のもとに $\mathbb{C}^*$-作用は中心ファイバー $L_0 \to M_0 = \pi^{-1}(0)$ への $\mathbb{C}^*$-作用を誘導する．また，もし (M, L) が $\mathbb{C}^*$-作用を持てば，直積 $L \times \mathbb{C} \to M \times \mathbb{C}$ が自然にテスト配位を与える．これを**直積配位**という．直積配位において $\mathbb{C}^*$ が M に自明に作用するとき，この配位は自明な配位であるという．

定義 2.6. (M, L) が **K 半安定**（または **K 安定**）であるとは，任意の自明でないテスト配位に対し中心ファイバー (M_0, L_0) の F_1 が非正（または負）であるときをいう．(M, L) が **K polystable** であるとは，(M, L) は K 半安定であり，更に等号が成立するのはテスト配位が直積配位であるときに限るときをいう．

予想 (Yau-Tian-Donaldson, [30], [27], [10])：(M, L) を偏極多様体とする．Kähler 類 $c_1(L)$ に定スカラー Kähler 計量が存在するための必要十分条件は (M, L) が K polystable であることであろう．

この予想の必要性の証明は既に得られている（Chen-Tian [6], Donaldson [11], Stoppa [26], 満渕 [21]）.

次の補題は中心ファイバーが非特異の場合は F_1 は定数倍を除いて $-f(X)$ と一致することを示す．ここに X は $\mathbb{C}^*$-作用の無限小生成元である．このことと，Tian [27] による満渕 energy の振る舞いに関する解析が上の予想の根拠になっている．

補題 2.7 ([10])**.** F_1 の定義において，もし N が非特異射影多様体であるならば

$$F_1 = \frac{-1}{2vol(N, \omega)} f(X)$$

が成立する．ただし X は $\mathbb{C}^*$-作用の無限小生成元で，f は *([12])* で定義した *Lie* 環準同型である．

3. 佐々木多様体

まず, 佐々木多様体を次のように定義する；Riemann 多様体 (S,g) に対してその Riemann 錐 $(\mathbb{R}_+ \times S, dr^2 + r^2 g)$ を $(C(S), \bar{g})$ と書くことにする．

定義 3.1. *Riemann* 錐 $(C(S), \bar{g})$ が *Kähler* 多様体となるとき，*Riemann* 多様体 (S,g) は**佐々木多様体**であるという．したがって佐々木多様体は奇数次元である．また，$(\{r=1\} \subset C(S), \bar{g}_{|\{r=1\}})$ は (S,g) と等長的である．

佐々木多様体 (S,g) が与えられると, それに付随して, 幾つかの重要な対象が存在する；
J を $(C(S), \bar{g}, J)$ が Kähler 多様体となるような複素構造とする．$C(S)$ 上のベクトル場 $\tilde{\xi}$ 及び 1-形式 $\tilde{\eta}$ を

$$\tilde{\xi} = Jr\frac{\partial}{\partial r}, \quad \tilde{\eta} = \frac{1}{r^2}\bar{g}(\tilde{\xi}, \cdot) = \sqrt{-1}(\bar{\partial} - \partial)\log r$$

により定義し, それぞれ（$C(S)$ 上の）**Reeb ベクトル場**, **接触形式**と呼ぶ．これらを $\{r=1\} \simeq S$ に制限したもの $\xi = \tilde{\xi}_{|S}$, $\eta = \tilde{\eta}_{|S}$ は S 上のベクトル場および 1-形式を与え, これらも Reeb ベクトル場, 接触形式と呼ぶ. Reeb ベクトル場 $\tilde{\xi}$ は $(C(S), \bar{g})$ 上の Killing ベクトル場であり, $\tilde{\xi} - \sqrt{-1}J\tilde{\xi}$ は $(C(S), J)$ 上正則である．また, $\bar{g}(\tilde{\xi}, \tilde{\xi}) = r^2$ となることも直ちにわかる．
さらに, Kähler 多様体 $(C(S), J, \bar{g})$ の Kähler 形式 ω は

$$\omega = \frac{1}{2}d(r^2\tilde{\eta}) = \frac{\sqrt{-1}}{2}\partial\bar{\partial}r^2$$

である．

例 3.2. 最も基本的な例は奇数次元単位球面 $S^{2m+1}(1)$ である．この場合，*Riemann* 錐は複素ユークリッド空間から原点をぬいた $(\mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}, \langle\ ,\ \rangle)$ であり，*Reeb* ベクトル場は

$$\tilde{\xi}_0 = \sum_{j=0}^{m}(x^j\frac{\partial}{\partial y^j} - y^j\frac{\partial}{\partial x^j}) = \sqrt{-1}\sum_{j=0}^{m}(z^j\frac{\partial}{\partial z^j} - \bar{z}^j\frac{\partial}{\partial \bar{z}^j})$$

で与えられる．

さて, 佐々木多様体は, その定義より, 実 1 次元高い Kähler 多様体（Riemann 錐）と密接な関係があることは明らかであるが, Reeb ベクトル場 ξ が定める葉層と横断的な方向に実 1 次元低い Kähler 構造が入る事も重要である；佐々木多様体 (S,g) の S 上の Reeb ベクトル場 ξ は $g(\xi,\xi)=1$ を満たし, S 上の葉層構造 $\mathcal{F}_\xi$ を定める．これを S の Reeb 葉層と呼ぶ. $\tilde{\xi} - \sqrt{-1}J\tilde{\xi}$ は $C(S)$ 上の正則ベクトル場であるので, $\tilde{\xi} - \sqrt{-1}J\tilde{\xi}$ により $C(S)$ 上に正則な flow が生成される．その局所軌道は Reeb 葉層 $\mathcal{F}_\xi$ に横断的正則構造（ Φ と表す）を定義する：S の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ と沈めこみ $\pi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha \subset \mathbb{C}^m$ が存在し, $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ の場合

$$\pi_\alpha \circ \pi_\beta^{-1} : \pi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \pi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

が双正則となる．さらに，各 V_α 上には次のように Kähler 構造を与えることが出来る． $D = \mathrm{Ker}\ \eta \subset TS$ とする． 各 $p \in U_\alpha$ に対して $d\pi_\alpha : D_p \to T_{\pi_\alpha(p)}V_\alpha$ は同型である．Reeb ベクトル場 ξ は佐々木多様体 (S,g) の Killing ベクトル場であるので, 佐々木計量の制限 $g_{|D}$ は V_α 上の well-defined な Hermite 計量 g^T_α を

与える．これは Kähler 計量であり（基本 2 次形式 ω_α^T は $d\eta/2_{|U_\alpha}$ に対応する），$\pi_\alpha\circ\pi_\beta^{-1}:\pi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)\to\pi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)$ が Kähler 多様体として等長的であることがわかる．したがって, Reeb 葉層 $\mathcal{F}_\xi$ は S 上の Kähler 葉層である．

以下, 佐々木多様体は Reeb ベクトル場, 接触形式及び横断的正則構造も明記した方が良いと思われるときには $(S,g;\xi,\eta,\Phi)$ のように表すことにする．

例 3.3. 例 3.2 の奇数次元単位球面の場合, *Reeb* ベクトル場 ξ_0 は S^1 作用 $(z^0,\cdots,z^m)\mapsto(e^{i\theta}z^0,\cdots,e^{i\theta}z^m)$ を生成するので，「横断的 *Kähler* 構造」は S^1 作用の軌道空間 $(\mathbb{C}P^m,g_{FS})$，g_{FS} は *Fubini-Study* 計量, である．このように, *Reeb* ベクトル場が（局所）自由な S^1 作用を生成する佐々木多様体を **(quasi-)regular** であるという．*(quasi-)regular* な佐々木多様体の横断的 *Kähler* 構造は S^1 作用の商として得られる *Kähler* 多様体（軌道体）であり, 逆に *Kähler* 多様体（軌道体）(M,ω) で *Kähler* 類 $[\omega]$ が整数係数コホモロジー類となるものに対して，$c_1(L)=[\omega]$ を満たす複素（軌道）直線束 L に随伴する $U(1)$ 束 $S(L)$ 上には (M,ω) を横断的 *Kähler* 構造とする *(quasi-)regular* な佐々木計量を構成することが出来る．詳しくは [3] 等を参照.

一方, *Reeb* ベクトル場が閉じていない積分曲線を持つとき, 佐々木多様体は **irregular** であるという．この場合には横断的 *Kähler* 構造は *Kähler* 多様体として実現できるわけではない.

最後に, 佐々木多様体 (S,g) がさらに Einstein 多様体である場合に, Riemann 錐計量 $\bar{g}$, 横断的 Kähler 計量 g^T が満たすべき条件をまとめておく.

命題 3.4. (S,g) を $(2m+1)$-次元佐々木多様体とする．次の 3 つの条件は同値である．

(a) (S,g) は佐々木・アインシュタイン多様体である．このとき *Einstein* 定数は $2m$ となる．
(b) $(C(S),\overline{g})$ は *Ricci* 平坦 *Kähler* 多様体である．
(c) *Reeb* 葉層の局所軌道空間は *Einstein* 定数 $2m+2$ の横断 *Kähler-Einstein* 計量を持つ．

この命題の証明は [3] を見よ（ 1 と 2 の同値性は Lemma 11.1.5 に，1 と 3 の同値性は Theorem 7.3.12 にある）．

S が Einstein 計量を持つならば命題 3.4 の (c) により,

$$\rho^T=(2m+2)\omega^T=(m+1)d\eta \tag{8}$$

が成り立つ．よって $c_1^B(\nu(\mathcal{F}_\xi))>0$, i.e. $c_1^B(\nu(\mathcal{F}_\xi))$ は正の basic $(1,1)$-form で代表される．このとき basic コホモロジー群から通常のドラームコホモロジー群への自然な準同型 $H_B^2(\mathcal{F}_\xi)\to H^2(S)$ のもとに basic 第 1 Chern 類 $c_1^B(\nu(\mathcal{F}_\xi))$ は通常の第 1 Chern 類 $c_1(D)$ に写される．ここに，$D=\mathrm{Ker}\,\eta$ とおき，これを **接触束**とよぶ．．しかし (8) により

$$c_1(D)=(2m+2)\omega^T=(m+1)[d\eta]=0 \tag{9}$$

である．逆に $c_1^B(\nu(\mathcal{F}_\xi))>0$ かつ $c_1(D)=0$ ならばある定数 $\tau>0$ に対し $c_1^B=\tau[d\eta]$ となる．この証明は [17] の Proposition 4.3 を見よ．

Kähler 錐多様体 $(C(S),\overline{g})$ がトーリックのとき佐々木多様体 (S,g) は トーリックであるというのであった．すなわち $(m+1)$-次元トーラス $G\cong T^{m+1}$ が $(C(S),\overline{g})$ に正則等長写像として効果的に作用する．G は r と複素構造 J を不変にするので $\widetilde{\xi}$ も不変にする．$\widetilde{\xi}$ の生成する flow は $C(S)$ に正則等長変換として作用するが，G はすでにトーラス作用として作用できる最大次元になっているので $\widetilde{\xi}$ は G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ に入っていなければならない．したがって，G の $C(S)$ への作用は自然に S への作用を誘導する．

定義 3.5. $(m+1)$-次元トーラス G の *Lie* 環 $\mathfrak{g}$ の双対空間を $\mathfrak{g}^*$ とする．$\mathbb{Z}_{\mathfrak{g}}$ を $\mathfrak{g}$ の格子点全体とする．すなわち $\mathbb{Z}_{\mathfrak{g}}$ は指数写像 $\exp : \mathfrak{g} \to G$ の核である．$\mathfrak{g}^*$ の部分集合 C が有理凸多面錐であるとは有限個のベクトル $\lambda_i \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{g}}$, $1 \leq i \leq d$, が存在して

$$C = \{y \in \mathfrak{g}^* \mid \langle y, \lambda_i \rangle \geq 0 \text{ for } \ i = 1, \cdots, d\}$$

と表されるときを言う．集合 λ_i は任意の j に対し

$$C \neq \{y \in \mathfrak{g}^* \mid \langle y, \lambda_i \rangle \geq 0 \text{ for all } i \neq j\}$$

が成立するという意味で極小であると仮定する．また，各 λ_i は原始的，つまり λ_i は 整数 $a \geq 2$ と $\mu \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{g}}$ を用いて $\lambda_i = a\mu$ という形に表すことはできないと仮定する．（従って，C が空でない内部を持つとき d は余次元 1 の面の個数に等しい．）これらの２つの仮定の下に空でない内部を持つ有理凸多面錐が *"good"* であるとは以下の条件をみたすときである．

もしある $\{i_1, \cdots, i_k\} \subset \{1, \cdots, d\}$ に対し

$$\{y \in C \mid \langle y, \lambda_{i_j} \rangle = 0 \text{ for all } j = 1, \cdots, k\}$$

が C の空でない面であるならば，$\lambda_{i_1}, \cdots, \lambda_{i_k}$ は $\mathbb{Z}$ 上 1 次独立であり，

$$\{\sum_{j=1}^{k} a_j \lambda_{i_j} \mid a_j \in \mathbb{R}\} \cap \mathbb{Z}_{\mathfrak{g}} = \{\sum_{j=1}^{k} m_j \lambda_{i_j} \mid m_j \in \mathbb{Z}\} \tag{10}$$

をみたす．

good な有理凸多面錐 C が与えられると滑らかなトーリック接触多様体でそのモーメント像が C になるものが構成される．（good という条件は滑らかという条件を言い表している．）

定義 3.6. 高さ ℓ の $(m+1)$-次元トーリック・ダイアグラムとは，(10) をみたす $\lambda_i \in \mathbb{Z}^{m+1} \cong \mathbb{Z}_{\mathfrak{g}}$ と $\gamma \in \mathbb{Q}^{m+1} \cong (\mathbb{Q}_{\mathfrak{g}})^*$ の集まりで，次の２つの条件を満たすものである．

(1) ℓ は自然数で，$\ell\gamma$ が格子 $\mathbb{Z}^{m+1} \cong \mathbb{Z}_{\mathfrak{g}}^*$ の原始的元になるもの．
(2) $\langle \gamma, \lambda_i \rangle = -1$.

good な有理凸多面錐 C が高さ ℓ のトーリック・ダイアグラムから定まるとは，上の２条件 (1) と (2) をみたすような有理ベクトル γ が存在するときをいう．

"height ℓ" という用語を使う理由は，$SL(m+1, \mathbb{Z})$ の適当な元を用いて変換して

$$\gamma = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\ell} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

という形にできるが，このとき各 λ_i の第１成分は一斉に ℓ になる，つまり λ_i は一斉に高さ ℓ になるからである．次の定理は定義 3.6 の高さ一定という条件は $C(S)$ の Calabi-Yau 条件であるということを主張する．

定理 3.7 ([7]). S をコンパクト，トーリック佐々木多様体とし，$\dim S \geq 5$ とする．このとき次の３つの条件は同値である．

(a) $c_1^B > 0$ かつ $c_1(D) = 0$.

(b) S は $\lambda_1, \cdots, \lambda_d \in \mathfrak{g}$ と $\gamma \in \mathfrak{g}^*$ により与えられる高さ $\ell \in \mathbb{N}$ のトーリック・ダイアグラムから定まり，*Reeb* 場 $\xi \in \mathfrak{g}$ は

$$\langle \gamma, \xi \rangle = -m - 1 \quad \text{and} \quad \langle y, \xi \rangle > 0 \quad \text{for all } y \in C$$

をみたす．ここに $C = \{y \in \mathfrak{g}^* | \langle y, \lambda_j \rangle \geq 0,\ j = 1, \cdots, d\}$ である．

(c) ある自然数 ℓ に対し，標準束 $K_{C(S)}$ の ℓ 次の冪 $K_{C(S)}^{\otimes \ell}$ は自明である．

論文 [17] の主定理は次の通りである．

定理 3.8 ([17])**.** *S を定理 3.7 に述べられた 3 つの同値な条件をみたすコンパクト，トーリック佐々木多様体とする．よって basic コホモロジー類として $c_1^B = (2m+2)[\omega^T]$ が成立していると仮定してよい．このとき，Reeb ベクトル場を変形し，さらに横断 Kähler 計量を変形することにより，佐々木・アインシュタイン計量を構成することができる．*

定理 3.9 ([7])**.** *(S, g) をコンパクト，トーリック佐々木・アインシュタイン多様体とする．このとき横断正則構造の自己同型群の単位元を含む連結成分が g と両立する佐々木・アインシュタイン計量全体の空間に推移的に作用する．*

定理 3.8 の直接的応用として次を得る．

定理 3.10 ([7])**.** *各 $k \in \mathbb{N}$ に対し，$S^2 \times S^3$ の k 個の連結和 $k(S^2 \times S^3)$ には可算無限個の変形非同値なトーリック佐々木アインシュタイン計量が存在する．*

この結果のトーリックでない場合は Boyer, Galicki, Nakamaye, Kóllar らにより知られていた ([5], [4], [18])．また，トーリックの場合でも k が odd の場合は van Coevering [28] が別の方法で構成している．

References

[1] T. Aubin : Equations du type de Monge-Ampère sur les variétés kählériennes compactes, C. R. Acad. Sci. Paris, **283**, 119-121 (1976)

[2] V.V. Batyrev and E.N. Selivanova : Einstein-Kähler metrics on symmetric toric Fano manifolds, J. Reine Angew. Math. 512 (1999) 225–236.

[3] C.P. Boyer and K. Galicki : Sasakian geometry, (Oxford Mathematical Monographs., 2008).

[4] C. P. Boyer, K. Galicki, and J. Kollár, Einstein metrics on spheres, Ann. of Math.,162 (2005), no. 1, 557-580.

[5] C. P. Boyer, K. Galicki, and M. Nakamaye : On the geometry of Sasakian-Einstein 5-manifolds, Math. Ann. 325 (2003), no. 3, 485-524.

[6] X.X. Chen and G. Tian : Geometry of Kähler metrics and foliations by holomorphic discs, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. No. 107 (2008), 1-107. math.DG/0409433

[7] K. Cho, A. Futaki and H. Ono : Uniqueness and examples of toric Sasaki-Einstein manifolds, Comm. Math. Phys., 277 (2008), 439-458. (math.DG/0701122)

[8] W. Ding and G.Tian : Kähler-Einstein metrics and the generalized Futaki invariant, Invent. Math., **110**, 315-335 (1992)

[9] S.K. Donaldson : Scalar curvature and projective embeddings, I, J. Differential Geometry, 59(2001), 479-522.

[10] S.K. Donaldson : Scalar curvature and stability of toric varieties, J. Differential Geometry, 62(2002), 289-349.

[11] S.K. Donaldson : Lower bounds on the Calabi functional, J. Differential Geometry, 70(2005), 453-472.

[12] A. Futaki : An obstruction to the existence of Einstein Kähler metrics, Invent. Math. **73**, 437-443 (1983)

[13] A. Futaki : Kähler-Einstein metrics and integral invariants, Lecture Notes in Math., vol.1314, Springer-Verlag, Berline-Heidelberg-New York,(1988)

[14] A. Futaki : Asymptotic Chow stability and integral invariants, Intern. J. Math., **15**, 967-979, (2004).

[15] A. Futaki : Momentum construction on Ricci-flat Kähler cones, preprint. arXiv:math/0703138.
[16] A. Futaki, H. Ono and Y. Sano : Hilbert series and obstructions to asymptotic semistability, preprint. arXiv:0811.1315.
[17] A. Futaki, H. Ono and G. Wang : Transverse Kähler geometry of Sasaki manifolds and toric Sasaki-Einstein manifolds, to appear in J. Differential Geometry. math.DG/0607586
[18] J. Kollár, Einstein metrics on connected sums of $S^2 \times S^3$, math.DG/0402141 (2004).
[19] T. Mabuchi : An obstruction to asymptotic semi-stability and approximate critical metrics, Osaka J. Math., 41(2004), 463-472. math.DG/0404210.
[20] T. Mabuchi : An energy-theoretic approach to the Hitchin-Kobayashi correspondence for manifolds, I, Invent. Math. 159(2004), 225-243.
[21] T. Mabuchi : K-stability of constant scalar curvature polarization, preprint. arXiv:0812.4093
[22] Y. Matsushima : Sur la structure du groupe d'homéomorphismes d'une certaine variété kaehlérienne, Nagoya Math. J., **11**, 145-150 (1957)
[23] D. Mumford : Stability of projective varieties, L'Enseignement Mathematiques, 23(1977), 39-110.
[24] B. Nill and A. Paffenholz : Examples of non-symmetric K?hler-Einstein toric Fano manifolds, preprint. arXiv:0905.2054
[25] H.Ono, Y.Sano and N.Yostutani : An example of asymptotically Chow unstable manifolds with constant scalar curvature, preprint. arXiv:0906.3836.
[26] J. Stoppa : K-stability of constant scalar curvature Kähler manifolds, arXiv:0803.4095
[27] G. Tian : Kähler-Einstein metrics with positive scalar curvature, Invent. Math., **130**, 1-37 (1997).
[28] C. van Coevering : Toric surfaces and Sasakian-Einstein 5-manifolds, math.DG/0607721.
[29] S.-T. Yau : On Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **74**, 1798-1799 (1977).
[30] S.-T. Yau, Open problems in Geometry, Proc. Symp. Pure Math. 54 (1993) 1-28.

東京都目黒区大岡山 2-12-1, 東京工業大学理工学研究科数学専攻, 〒 152-8551
E-mail address: `futaki@math.titech.ac.jp`