論　説

Einstein 計量と GIT 安定性 II

二　木　昭　人

1　はじめに

本稿は4年前の 2007 年に小野肇氏と共同で執筆した論説 [28] の続編である．しかし，多少重複することを厭わず書くことにより，本稿自体を self-contained な読み物にし，[28] とは独立に読めるように心がけた．また，この間に，別の survey paper [25] と [32] も書く機会があった．この2つとの重複を避けた部分，この2つの方が詳しい部分もあるので [25]，[32] も合わせて読んでいただけたら幸いである．

まず, 前作 [28] の内容について振り返ろう．Fano 多様体 M にいつ正の Kähler-Einstein 計量が存在するかという問題にはいくつかの障害が知られている．その代表的なものは，正則ベクトル場全体のなす Lie 環 $\mathfrak{h}(M)$ が簡約可能（reductive）でないなら Kähler-Einstein 計量は存在しないという松島の定理 [49] と，ある Lie 環指標 $\mathcal{F}_{c_1} : \mathfrak{h}(M) \to \mathbb{C}$ が存在して，もし $\mathcal{F}_{c_1} \neq 0$ ならば Kähler-Einstein 計量は存在しないという筆者の結果 [22] である．この他，幾何学的不変式論の意味の安定性が必要十分条件であろうと予想されていて（Yau [68]），そのようなアイデアで最初の結果を出したのは Tian [65] である．松島の定理も筆者の結果も $\mathfrak{h}(M) = 0$ ならば無条件になるが，Tian の結果は $\mathfrak{h}(M) = 0$ でも使える条件である． Tian はこの論文で K-安定性という概念を創出し，Kähler-Einstein 計量が存在すれば K-安定であるという結果を証明した．更に $\mathfrak{h}(M) = 0$ でも K-安定でない Fano 多様体があり，その多様体には Kähler-Einstein 計量は存在しないことを示した．Tian のアイデアはその後，Donaldson [17] によって精密化され，K-安定性という概念は $\mathcal{F}_{c_1}$ を代数幾何的に定義し直した不変量，“Donaldson-二木不変量”，を数値的判定法において用いることにより定義し直された．そして現在では，偏極多様体 (M, L) の $c_1(L)$ にスカラー曲率一定の Kähler 形式が存在するための必要十分条件は (M, L) が K-安定であることであろうと予想されている（Yau-Tian-Donaldson 予想）．ただし，異なる流儀の定義では ‘K-安定’ は ‘K-polystable’ と言われる．この予想の “必要性” の部分はすでに解決されている（Chen-Tian [9], Donaldson [18], Stoppa [63], 満渕 [48]）．またトーリック Kähler 曲面に対してはこの予想が正しいこと（つまり “十分性” の部分）を Donaldson [19] が証明している．

以上が中心的テーマである Yau-Tian-Donaldson 予想の概略と現状である．Monge-Ampère 方程式を解くことになるこの非線形偏微分方程式の問題と K 安定性という幾何学的不変式論という代数幾何のアイデアを結ぶものはモーメント写像を用いたシンプレクティック幾何である．この説明は [28] の第2節で行った．[28] の第3節では漸近的 Chow 安定性とスカラー曲率一定計量の存在問題との直接的関係について論じた．[28] の第4節では K 安定性の詳しい内容を説明した．[28] の最後の第5

節では隣接分野である佐々木・アインシュタイン計量について解説した．特に，高さ一定のトーリックダイアグラムから作られる佐々木多様体は佐々木・アインシュタイン計量を持つという結果（二木-小野-Wang [30]，趙-二木-小野 [10]）について述べた．

本稿の第2節以下の内容は次の通りである．第2節では，ある積分不変量の族が，

(a)　各 Kähler 類において，k 次 Chern 形式が調和形式になるような Kähler 計量を持つための障害 ([22], [23], [5], [2]).

(b)　漸近的 Chow 安定性の障害 ([24], [45]).

(c)　Kähler とは限らないコンパクト複素多様体の不変量 ([27]).

の3つの族を部分族として含み，この3つの部分族の共通部分が Kähler-Einstein 計量が存在するための障害であることを解説する．さらに，(c) のコンパクト局所共形 Kähler 多様体の研究への応用（[26]）について述べる．第3節では，(b) を詳述する．特に，Kähler-Einstein 多様体で，漸近的 Chow polystable でない例が存在することをのべる．偏極多様体が Chow polystable であることと，balanced 埋め込みが存在し，balanced 計量が存在することとは同値である．スカラー曲率一定計量の存在を示す道筋として (M, L^k) に対する balanced 計量の列が $k \to \infty$ の時にスカラー曲率一定計量に収束することを示す方法が有望視されていたが，上記の例は，Kähler-Einstein 計量（従ってスカラー曲率一定計量）が存在しても balanced 計量の列を取ることは必ずしもできないことを意味している．第4節では，乗数イデアル層と積分不変量 $\mathcal{F}_{c_1}$ との関係（[31]）について論ずる．乗数イデアル層の Kähler-Einstein 計量の存在問題への応用は Nadel [50] により見いだされ，その後，Demailly-Kollár [13] により改良され，佐々木・アインシュタイン計量の存在に応用されたり，Phong-Sesum-Sturm [59] や Rubinstein [60] により正規化 Kähler-Ricci 流が収束しない場合に現れるものとして研究されたりしている．第5節では Ricci ソリトンに関する2つの研究について述べる．一つはコンパクト Ricci ソリトンの直径の下からの評価（[33]），もう一つは Ricci flow の永遠解の構成（[34]）についてである．

2　複素微分幾何における積分不変量

M をコンパクト複素多様体とする．次の (I), (II) の2つの設定が仮定されているとしよう．

(I)　複素 Lie 群 G を構造群とする主束 $P_G \to M$, P_G 上の $(1,0)$-型接続形式 θ が与えられ，Θ を θ の曲率形式とする．M の複素多様体としての自己同型群 $\mathrm{Aut}(M)$ のある部分群 H は P_G への作用に持ち上がっているとする．P_G に G は右から H は左から作用し，G と H の作用は可換であるとする．

(II)　$\Omega \in H^2_{DR}(M)$ を Kähler 類とし，固定する．Ω から Kähler 形式 ω を選んだ時，H の Lie 環 $\mathfrak{h}$ の元 X を M 上の正則ベクトル場とみなすと，複素数値関数 $u_X \in C^\infty_{\mathbb{C}}(M)$ で

$$i(X)\omega = -\overline{\partial} u_X \tag{1}$$

をみたすものが存在すると仮定する．このような u_X は定数差を除いて一意的に決まるので，

$$\int_M u_X \ \omega^m = 0 \tag{2}$$

となるように正規化する．

以上の (I), (II) のもとに k 次 G 不変多項式全体を $I^k(G)$ により表す：

$$I^k(G) = \{\phi : \mathrm{Sym}^k(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C} \mid \phi \circ \mathrm{Ad}(g) = \phi\}.$$

そして $\phi \in I^k(G)$ と $X \in \mathfrak{h}$ に対し,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\phi(X) = (m-k+1) &\int_M \phi(\Theta) \wedge u_X\, \omega^{m-k} \\ &+ \int_M \phi(\theta(X) + \Theta) \wedge \omega^{m-k+1} \qquad (3)\end{aligned}$$

とおく.

定理 2.1 ([24]) $\mathcal{F}_\phi(X)$ は P_G の $(1,0)$-型接続形式 θ の選び方にも, M の Kähler 形式 $\omega \in \Omega$ の選び方にもよらない. $\mathcal{F}_\phi : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ は Lie 環準同型である.

更にこれらの $\mathcal{F}_\phi$ は筆者が興味を持って来た, 微分幾何で有用な以下の３つの場合 (a), (b), (c) を含む. ただ, 式 (3) は H.Cartan による同変コホモロジーに関する古い文献 [8] に現れていると言うこともでき, その意味で定理 2.1 は筆者の結果とは言えないかもしれない. しかし, 文献 [8] では代数的位相幾何の表し方を用いており, 微分幾何における有用性は定理 2.1 のような微分幾何的表現がなされていて初めてわかることである.

(a) 各 Kähler 類において, k 次 Chern 形式が調和形式になるような Kähler 計量を持つための障害 ([22], [23], [5], [2]).

(b) 漸近的 Chow 安定性の障害 ([24], [45]).

(c) 非 Kähler でもよいコンパクト複素多様体の不変量 ([27]).

これらの３つの共通部分にあるのは M が Fano 多様体であり, $\mathcal{F}_\phi$ が Kähler-Einstein 計量が存在するための障害である場合である. 以下では (a), (b), (c) のそれぞれについて少し詳しく述べ, 更に次節では (b) についてより詳しく述べる.

(a) $G = GL(m, \mathbb{C})$ とし, P_G は M の正則接束 $T'M$ の枠束とする. 枠束とは T'_pM の基底全体をすべての $p \in M$ にわたって集めた多様体である. 右から $GL(m, \mathbb{C})$ が基底の取り換えとして作用している. ここでは 接続 θ は Kähler 形式 ω の Levi-Civita 接続を取る. $I^*(GL(m, \mathbb{C}))$ は固有値の j-次基本対称式 c_j により生成されている. ここでは ϕ として k-次基本対称式 c_k を取る. すると $\mathcal{F}_{c_k}$ の第２項は常に 0 になる. そして, $\mathcal{F}_{c_k}$ は, k 次 Chern 形式 $c_k(\omega)$ が調和形式となるような Kähler 形式 ω が Ω の中に存在するための障害となる（[2]). 特に $k = 1$ の場合, $c_1(\omega)$ が調和であることと ω のスカラー曲率が一定であることとは同値であるので, Ω にスカラー曲率一定 Kähler 計量が存在するための障害となる. また更に, M が Fano 多様体のとき, すなわち $c_1(M) > 0$ （これは $c_1(M)$ が Kähler 形式で代表できるという意味である）のとき, $c_1(M)$ に属するスカラー曲率一定 Kähler 計量は Kähler-Einstein 計量であるから, $\Omega = c_1(M)$ と取る時, $\mathcal{F}_{c_1}$ は Fano 多様体 M が Kähler-Einstein 計量を持つための障害となる.

実は (a) は別な定式化があり, H については Ω を保つ正則自己同型全体のなす部分群でよく, 従って単位元を含む連結成分を含む. よってその Lie 環は正則ベクトル場全体のなす複素 Lie 環でもよ

い．

(b) ある豊富な直線束 $L \to M$ に対し $\Omega = c_1(L)$ と書けているとしよう．P_G は再び $T'M$ の枠束で，$G = GL(m, \mathbb{C})$ とする．H は下で説明する $\mathrm{Aut}(M, L)$ を取る．ϕ は ℓ-次 Todd 多項式 $\mathrm{Td}^{(\ell)}$ とする．するともし (M, L) が漸近的 Chow 半安定ならば $\ell = 1, \cdots, m$ に対し $\mathcal{F}_{\mathrm{Td}^{(\ell)}} = 0$ となる ([24])．

$\mathcal{F}_{\mathrm{Td}^{(1)}}$ は $\mathcal{F}_{c_1}$ と比例するので，$c_1(L)$ にスカラー曲率一定 Kähler 計量が存在するための障害になる．

7 次元トーリック Fano 多様体で $\mathcal{F}_{\mathrm{Td}^{(1)}} = 0$，$\mathcal{F}_{\mathrm{Td}^{(\ell)}} \neq 0$，$2 \leq \ell \leq 7$ となるものが存在する．ただし，$\Omega = c_1(M)$ と取る．Wang-Zhu [67] の定理によると $\mathcal{F}_{c_1} = 0$ なるトーリック Fano 多様体には Kähler-Einstein 計量が存在する．しかし，$\mathcal{F}_{\mathrm{Td}^{(\ell)}} \neq 0$，$2 \leq \ell \leq 7$ であるから，漸近的 Chow 不安定である．この例は Nill-Paffenholz [52] により Kähler-Einstein 多様体であるが Batyrev-Selivanova [3] の意味で対称ではない例として見出された．$2 \leq \ell \leq 7$ に対する $\mathcal{F}_{\mathrm{Td}^{(\ell)}}$ はすべて比例していて，0 ではない．この計算は小野-佐野-四ツ谷 [55] によりなされた．

$L \to M$ を豊富な直線束とするとき，M の自己同型群 $\mathrm{Aut}(M)$ の部分群で L への作用に持ち上がるものの極大なものを $\mathrm{Aut}(M, L)$ により表す．実は $\mathrm{Aut}(M, L)$ の Lie 環は，M 上の正則ベクトル場 X で，ある複素数値関数 $u_X \in C^\infty_{\mathbb{C}}(M)$ により

$$i(X)\omega = -\overline{\partial} u_X \tag{4}$$

と表されるものの全体のなす Lie 環 $\mathfrak{h}_0(M)$ に一致する．Donaldson [16] によると，$\mathrm{Aut}(M, L)$ が離散的のとき，$c_1(L)$ にスカラー曲率一定計量が存在するならば漸近的 Chow 安定である（次節の定理 3.1 参照）．上記の例は，$\mathrm{Aut}(M, L)$ が離散的でないときは事情が大きく異なることを示している．

満渕 [47] によると漸近的 Chow 安定性と 漸近的 Hilbert 安定性は同値である．これの簡明な証明が尾高 [53] によっても与えられている．

(c) $k = m + 1$ とする．このとき，式 (3) の第 1 項は 0 であり，

$$\mathcal{F}_\phi(X) = \int_M \phi(\theta(X) + \Theta) \tag{5}$$

となる．更に，P_G を $T'M$ の枠束とする．このとき，(5) は Kähler 類に無関係であるから，非 Kähler でもよいコンパクト複素多様体の不変量となる．H については (II) の条件は不要である．

以下，$\phi = c_1^{m+1}$ とし，

$$f := \mathcal{F}_{c_1^{m+1}} \tag{6}$$

とおく． このとき

$$f(X) = (m+1) \int_M \mathrm{div} X \ \left(\frac{i}{2\pi} \mathrm{tr}(\Theta) \right)^m \tag{7}$$

と書かれる．X は任意の正則ベクトル場でよいので，M の正則ベクトル場全体のなす Lie 環 $\mathfrak{h}(M)$ 上の指標 $f : \mathfrak{h}(M) \to \mathbb{C}$ が得られる．

θ がある Kähler 計量 g の Levi-Civita 接続であるとき,

$$\begin{aligned}\frac{i}{2\pi}\mathrm{tr}\Theta &= -\frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log\det g\\ &= \frac{i}{2\pi}\sum_{i,j} R_{i\overline{j}}dz^i\wedge d\overline{z}^j\end{aligned}$$

である．すなわち，これは Ricci 形式である（第 1 Chern 形式でもある)．これを ρ_ω により表そう：

$$\rho_\omega = \frac{i}{2\pi}\sum_{i,j} R_{i\overline{j}}dz^i\wedge d\overline{z}^j.$$

すると，$f:\mathfrak{h}(M)\to\mathbb{C}$ は

$$f(X) = (m+1)\int_M \mathrm{div}X\ \rho_\omega^m \tag{8}$$

と表される．もし，ω が Kähler-Einstein 計量であるなら，$\rho_\omega = k\omega$ であるから，

$$f(X) = (m+1)\int_M \mathrm{div}X\ (k\omega)^m = 0$$

となる．すなわち，f は Kähler-Einstein 計量が存在するための障害である．実際，M が Fano 多様体の場合，$\mathcal{F}_{c_1}$ と f は一致する．この最後の事実の証明は [27] では Yau によって解かれた Calabi conjecture を用いてなされたが，最近直接計算による証明が Liu [43] により与えられた..

しかし，f は Kähler とは限らない任意のコンパクト複素多様体 M に対して定義される．M の C^∞ 級体積要素

$$dV = a\ idz^1\wedge d\overline{z}^1\wedge\cdots\wedge idz^m\wedge d\overline{z}^m$$

に対し，その Ricci 形式 ρ_{dV} を

$$\rho_{dV} = -\frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log a$$

とすると，$f:\mathfrak{h}(M)\to\mathbb{C}$ は

$$f(X) = (m+1)\int_M \mathrm{div}X\ \rho_{dV}^m \tag{9}$$

と表される．ここに $\mathrm{div}X$ は

$$\mathrm{div}X = \partial(i(X)dV)/dV \tag{10}$$

により定義されるものである．

これを被覆空間上で書き表してみよう．$\pi:\tilde{M}\to M$ をコンパクト複素多様体 M の被覆空間とし，Γ を被覆変換群とする．$\chi:\Gamma\to\mathbb{R}^+$ を群の準同型写像とする．

定義 2.2　$\tilde{M}$ 上の体積要素 dV が χ に関して automorphic であるとは

$$\gamma^*dV = \chi(\gamma)dV$$

がすべての $\gamma\in\Gamma$ に対し成立するときをいう．

次に

$$\mathfrak{h}_\Gamma(\tilde{M}) := \{X \in \mathfrak{h}(\tilde{M}) \mid \gamma_* X = X \text{ for all } \gamma \in \Gamma\}$$

とおくと，$\mathfrak{h}_\Gamma(\tilde{M})$ の元は Γ-不変であることから M のベクトル場を定め，$\mathfrak{h}_\Gamma(\tilde{M}) \cong \mathfrak{h}(M)$ ともみなされる．発散と Ricci 形式

$$\mathrm{div}(X) = \partial(i(X)dV)/dV,$$
$$\rho_{dV} = -i\partial\overline{\partial}\log dV$$

はどちらも Γ-不変であるのでそれぞれ M 上の関数と 2 形式を定める．そこで $f : \mathfrak{h}_\Gamma(\tilde{M}) \to \mathbb{C}$ を (9) と同じ形の式

$$f(X) = (m+1)\int_M \mathrm{div}X\ \rho_{dv}^m \tag{11}$$

により定義する．

定理 2.3 ([**26**])　線形関数 f は χ に関し automorphic な体積要素 dV の選び方に依存しない．更に，f は $\Gamma = \{1\}$ の場合のもの，すなわち M 上にもともとあるものと一致する．.

定理 2.4 ([**26**])　指標 f は Vaisman 多様体上では 0 になる．

ここにコンパクト複素多様体 M とその上のリーマン計量 g_0 の共形類の組 $(M, [g_0])$ が Vaisman 多様体であるとは $[g_0]$ は局所的に共形的 Kähler 計量で，ある計量 $g \in [g_0]$ とその基本 2-形式 ω，つまり $\omega(\cdot,\cdot) = g(J\cdot,\cdot)$，に対し，$d\omega = \theta\wedge\omega$ とするとき，θ が平行である時をいう（θ は Lee 形式と呼ばれるものである）．Kamishima-Ornea [38] によれば Vaisman 多様体の普遍被覆は佐々木多様体の錐多様体となっており，定理 2.4 はこの事実を用いて示される．

3　漸近的安定性の意味で不安定な Kähler-Einstein 多様体

本節では前節の (b) の部分をもう少し詳しく述べる．あらためて用語の確認から始めよう．(M, L) が偏極多様体であるとは，M がコンパクト複素多様体で，$L \to M$ が正の正則直線束のときをいう．ここに L が正の直線束とは第 1 Chern 類 $c_1(L)$ が Kähler 形式で代表できるときをいい，$c_1(L) > 0$ という記号で書き表す．このことは小平埋め込み定理が成り立つための条件になっていて，L は豊富であるという言い方をすることもある．

そこで $c_1(L)$ を Kähler 類とみなし，その類に属する Kähler 形式全体は類 $c_1(L)$ の部分集合とみなす．Kähler 形式が $c_1(L)$ に属する Kähler 計量で，スカラー曲率一定となるものが存在するかどうかを問うことが本節の問題設定である．反標準直線束 K_M^{-1} が正の時，M は Fano 多様体と呼ばれ，これは正の Kähler-Einstein 計量が存在するための必要条件である．Fano 多様体 M において Kähler 形式が K_M^{-1} に属する Kähler 計量で，スカラー曲率一定となるものとは Kähler-Einstein 計量のことである．

Lichinerowicz-松島の定理（[41], [49]）によれば M がスカラー曲率一定の Kähler 計量を持てば，正則ベクトル場のなす複素 Lie 環 $\mathfrak{h}(M)$ は簡約化可能 (reductive) である．この事実と前節 (a) で

説明した $\mathcal{F}_{c_1}$ はスカラー曲率一定 Kähler 計量が存在するための障害を与える．明らかに $\mathfrak{h}(M) = 0$ ならばどちらの障害も消える．しかしながら，$\mathfrak{h}(M) = 0$ でも幾何学的不変式論と関連した障害があることが知られている．このようなアイデアは Yau [68]，Tian [65]，Donaldson [15] による．そのような結果の典型的なものの一つとして次の結果がある．Chow 安定性，Chow 半安定性，Chow polystablity および Chow 不安定性等，また漸近的 Chow 安定性等の定義は [28] で述べたのでここでは省略し，[28] の第 3 節を参照していただくことにする．

定理 3.1 (Donaldson [16])　(M, L) を偏極多様体とし，$\mathrm{Aut}(M, L)$ は離散的であるとする．Kähler 形式が $c_1(L)$ に属するようなスカラー曲率一定 Kähler 計量が存在したとすると，次が成立する．

(a) (M, L) は漸近的に Chow 安定である．

(b) (M, L^k) が Chow 安定であると各 k に対し “balanced 計量” が存在するが，$k \to \infty$ のとき，“balanced 計量” はスカラー曲率一定計量に収束する．

ここに balanced 計量とは次のようなものである．M は L^k による小平埋め込みにより射影空間 $\mathbb{CP}^N$ に埋め込まれているとする．$(z_0 : z_1 : \cdots : z_N)$ を $\mathbb{CP}^N$ の斉次座標とする．M の埋め込みが balanced 埋め込みであるとは

$$i \int_M \frac{z_\alpha \overline{z_\beta}}{||z||^2} d\mu_V$$

を成分とする行列が単位行列の定数倍であるときを言い，balanced 埋め込みによる Fubini-Study 計量の M への制限を balanced 計量という．この定義は座標の取り方によるが， Chow 安定であると balanced 埋め込みを与える $H^0(M, L^k)$ の基底が $U(N+1) \times \mathbb{R}^*$ の作用を除いて一意的に存在する．また逆に balanced 埋め込みが存在すれば Chow polystable である．定理 3.1 は balanced 計量の列を用いてスカラー曲率一定 Kähler 計量の存在を示すことができるのではないかという期待を抱かせる．本節で述べたい事は $\mathrm{Aut}(M, L)$ が離散的でない場合，このような期待は持てないということを示す事である．まず，次の 2 つの結果を紹介しよう．

定理 3.2 (小野-佐野-四ツ谷 [55])　7 次元トーリック Kähler-Einstein Fano 多様体で漸近的 Chow 不安定なものが存在する．

定理 3.3 (Della Vedova-Zuddas [12])　スカラー曲率一定かつ Kähler 類が整類であるような Kähler 曲面で，漸近的 Chow 不安定なものが存在する．

また，オービフォールドの場合は $\mathrm{Aut}(M, L)$ が離散的でも漸近的 Chow 安定性が成り立たないという次の結果もある．

定理 3.4 (尾高 [54])　Donaldson の定理はオービフォールドでは成立しない．すなわち，自己同型群が有限な Kähler-Einstein オービフォールドで漸近的 Chow 不安定なものが存在する．

定理 3.2，定理 3.3 の鍵になるのは次の定理 3.5 である．これが前節 (b) で述べたことである．

定理 3.5 ([24])　もし偏極多様体 (M, L) が漸近的に Chow 半安定ならば，$1 \leq \ell \leq m$ に対し

$$\mathcal{F}_{Td^{(\ell)}}(X) = 0 \tag{12}$$

が成立する．特に $\ell = 1$ の場合は $f_1 = 0$ を意味する．

実際，定理 3.2 と定理 3.3 においては $\mathcal{F}_{Td^{(1)}}(X) = 0$ であるが，$\ell \geq 2$ に対しては $\mathcal{F}_{Td^{(\ell)}}(X) \neq$

0 となっている．定理 3.2 の例においては，次の定理から Kähler-Einstein 計量の存在が従う．

定理 3.6 (Wang-Zhu [67])　任意のトーリック Fano 多様体において Kähler-Ricci ソリトンが存在する．特に $\mathcal{F}_{c_1}=0$ ならば Kähler-Einstein 計量が存在する．

もちろん $\mathcal{F}_{c_1}=0$ と $\mathcal{F}_{Td^{(1)}}(X)=0$ は同値である．定理 3.3 の例でスカラー曲率一定 Kähler 計量が存在することは Arezzo-Pacard の結果 [1] から従う．定理 3.5 の動機になったのは満渕による次の結果である．

定理 3.7 (満渕 [45], [46])　(M,L) を偏極多様体とし，$\mathrm{Aut}(M,L)$ は離散的でないとする．このとき，一般に漸近的 Chow 半安定性に対する障害が定義される．さらに，Kähler 類 $c_1(L)$ にスカラー曲率一定の Kähler 形式が存在し，上記の障害が消えているならば，(M,L) は漸近的 Chow polystable である．

実は，定理 3.5 は定理 3.7 の障害を積分不変量の形に書き換えたもので，同値な障害を与えていることがわかる．定理 3.7 において「上記の障害が消えているならば」という条件をはずせるかどうかに興味を持ったのが，定理 3.5 の動機であり，さらにそれに続く論文 [29] である．以下にこれについて述べよう．

M を m 次元トーリック Fano 多様体としよう．L として K_M^{-1} と取る．m 次元実トーラス T^m は M に作用する．この T^m 作用は自然に K_M^{-1} への作用に持ち上がるが，K_M^{-1} にはファイバーに定数倍で作用する S^1 作用があるので，これと合わせて T^{m+1} 作用があり，従って K_M^{-1} もトーリック多様体である．T^{m+1} の元 g に対し，Lefchetz 数の形式的無限和

$$L(g) := \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Tr}(g|_{H^0(M,K_M^{-k})})$$

を考える．T^{m+1} の複素化 $T^{m+1}_{\mathbb{C}} \cong (\mathbb{C}^*)^{m+1}$ の元 $\mathbf{x}$ に対し，L を解析的に拡張したものを $L(\mathbf{x})$ とする．M の扇は $\{v_j \in \mathbb{Z}^m\}_j$ によって生成されているとすると，M のモーメント像は

$$P^* := \{w \in \mathbb{R}^m | v_j \cdot w \geq -1, \forall j\}$$

と書き表される．$C^* \subset \mathbb{R}^{m+1}(=\mathrm{Lie}(T^{m+1}))^*$ を P^* 上の錐とする．$\bigcup_{k=1}^{\infty}\{\text{basis of } H^0(M,K_M^{-k})\}$ は C^* の整数点と 1 対 1 に対応する．

$\mathbf{x} \in T^{m+1}_{\mathbb{C}}$ と $\mathbf{a}=(w,k) \in \mathbb{Z}^{m+1} \cap C^*$ に対し

$$\mathbf{x}^{\mathbf{a}} = x_1^{a_1} \cdots x_{m+1}^{a_{m+1}}$$

とおく．そして

$$\mathcal{C}(\mathbf{x}, C^*) := \sum_{\mathbf{a} \in C^* \cap \mathbb{Z}^{m+1}} \mathbf{x}^{\mathbf{a}}$$

とおき，$\mathcal{C}(\mathbf{x},C^*)$ を Hilbert 級数と呼ぶ．このとき，$\mathcal{C}(\mathbf{x},C^*)$ は $\mathbf{x}$ の有理関数であることが知られている．

補題 3.8　$\mathcal{C}(\mathbf{x},C^*) = L(\mathbf{x})$.

$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m+1} \cong \mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(T^{m+1})$ に対し，

$$e^{-t\mathbf{b}} := (e^{-b_1 t}, \cdots, e^{-b_{m+1}t})$$

とおくと

$$\mathcal{C}(e^{-t\mathbf{b}}, C^*) = \sum_{\mathbf{a} \in C^* \cap \mathbb{Z}^{m+1}} e^{-t\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}$$

は t に関する有理型関数になる.

さて, P を P^* の双対凸多面体とし,

$$C_R := \{(b_1, \cdots, b_m, m+1) | (b_1, \cdots, b_m) \in (m+1)P\} \subset \mathfrak{g}$$

とおく.（この集合に内在的意味付けをするとすると, この集合は K_M^{-1} から零切断を除いたもの（または零切断を１点につぶして頂点を除いたもの）を佐々木多様体の錐多様体とみなした場合の Reeb ベクトル場の動く超平面ということができる. しかし, 今の場合は佐々木多様体は余り関係がない.）$\mathbf{b} = (0, \cdots, 0, m+1)$ と置こう.

定理 3.9 (二木-小野-佐野 [29])　t に関する有理型関数

$$\frac{d}{ds}\mathcal{C}(e^{-t(\mathbf{b}+s\mathbf{c})}, C^*)|_{s=0}$$

の Laurant 級数の t の係数全体は $\mathcal{F}_{\mathrm{Td}^1}, \cdots, \mathcal{F}_{\mathrm{Td}^m}$ によって張られる線形空間と一致する.

この結果は, トーリック Fano 多様体の場合, $\mathcal{F}_{\mathrm{Td}^1}, \cdots, \mathcal{F}_{\mathrm{Td}^m}$ の計算はトーリック多様体としてのデータのみで計算できることを意味している. これに基づき, ３次元までのトーリック Fano 多様体について $\mathcal{F}_{\mathrm{Td}^1}, \cdots, \mathcal{F}_{\mathrm{Td}^m}$ を計算機を用いて計算したが, $\mathcal{F}_{\mathrm{Td}^1} = 0$ なら他も 0 になるという計算結果であった. 結局, $\mathcal{F}_{\mathrm{Td}^1} = 0$ であるが $j \geq 2$ に対し $\mathcal{F}_{\mathrm{Td}^j} \neq 0$ となる例があるかどうかは, 次の Batyrev-Selivanova の問題（[3]）と関連することがわかった. すなわち,「トーリック Fano 多様体 M において $\mathcal{F}_{c_1} = 0$ ならば M は対称トーリック Fano 多様体か？」ここにトーリック Fano 多様体が対称とは, $\mathrm{Aut}(M)$ の極大トーラスの代数的指標全体に Weyl 群が作用するが, その不動点は自明な指標に限るときをいう. この問題に対し, Nill-Paffenholz [52] は反例を 7 次元で構成した. 小野-佐野-四ツ谷 [55] が計算したのはこの例である.

4　乗数イデアル層と積分不変量

Fano 多様体, すなわち $c_1(M) > 0$ なるコンパクト複素多様体に対する Kähler-Einstein 計量の存在を証明する方法は, Siu [62], Tian [64], Nadel [50] らにより考案されている. 本節で扱うのは Nadel による乗数イデアル層である. Nadel の結果は次のように述べられる.

定理 4.1 (Nadel [50])　M を Fano 多様体とする. もし Kähler-Einstein 計量が存在しないならば, いくつかの性質をみたす乗数イデアル層が存在する. すなわち, そのような乗数イデアル層が存在しないならば Kähler-Einstein 計量が存在する.

この結果は連続法により Monge-Ampère 方程式の解の存在を証明するものである. Nadel の方法では解の列の爆発から乗数イデアル層を作るが, その後, Demailly-Kollár [13] が単独の劣調和関数から乗数イデアル層を作る方法により簡単化した. さらに Demailly-Kollár の方法はオービフォールドに応用され, 佐々木・Einstein 計量の存在につき目覚ましい結果を生んだ（[4], [40]）.

本節では，乗数イデアル層と $\mathcal{F}_{c_1}$ の関係についての筆者と佐野の結果 [31] を紹介する．Fano 多様体においては前節の $\mathfrak{h}_0(M)$ は正則ベクトル場全体のなす Lie 環 $\mathfrak{h}(M)$ と一致する．筆者と佐野の結果 [31] は次の Nadel の結果に触発されたものである．

定理 4.2 (Nadel [51]) Fano 多様体 M が Kähler-Einstein 計量を持たないとし，V を Nadel の意味の乗数イデアル層の台とする．正則ベクトル場のなす Lie 環 $\mathfrak{h}(M)$ の元 v で $\mathcal{F}_{c_1}(v) = 0$ なるものとする．このとき，

$$V \not\subset \mathrm{Zero}^+(v) := \{p \in \mathrm{Zero}(v) | \Re((\mathrm{div}(v))(p) > 0\}$$

となる．ここに，$\mathrm{div}(v)$ は

$$\mathrm{div}(v)\ \mathrm{vol}_g = \mathcal{L}_v \mathrm{vol}_g$$

により定義される．ただし，$\mathrm{div}(v)$ は $\mathrm{Zero}(v)$ にそっては g の取り方によらないことに注意せよ．

我々はこれをいくつかの形に拡張したい．そのために，次の 3 つのタイプの乗数イデアル層について調べる．以下，乗数イデアル層（multiplier ideal sheaf）を MIS と略す．

KE-MIS : Kähler-Einstein 計量の存在を連続法で証明しようとして出来ない場合に生ずる乗数イデアル層（Nadel によるもの）;

KRS-MIS : Kähler-Ricci ソリトンの存在を連続法で証明しようとして出来ない場合に生ずる乗数イデアル層;

KRF-MIS : Kähler-Ricci 流の収束を証明しようとして出来ない場合に生ずる乗数イデアル層.

M を Fano 多様体とし，G を $\mathrm{Aut}(M)$ の極大コンパクト部分群とする．T^r を G の極大トーラスとする．任意の G-不変 Kähler 計量 g で Kähler 形式

$$\omega_g := \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} g_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j$$

が $c_1(M)$ に属するようなものに対し，T^r の M への作用は ω_g に関してハミルトニアン作用であるから，そのモーメント写像を $\mu_g : M \to \mathfrak{t}^{r*}$ により表す．更に，$\xi \in \mathfrak{t}^r$ に対し，

$$D^{\leq 0}(\xi) := \{y \in \mu_g(M) \mid\ < y, \xi > \leq\ 0\}$$

と置く．

定理 4.3 (二木-佐野 [31]) Fano 多様体 M は Kähler-Einstein 計量をもたず，V を KE-MIS の台とする．$\xi \in \mathfrak{t}^r \subset \mathfrak{h}(M)$ は $\mathcal{F}_{c_1}(v_\xi) > 0$ をみたすとする．ただし v_ξ は ξ が定める正則ベクトル場である．すると任意の G-不変 Kähler 形式 $\omega_g \in c_1(M)$ に対し

$$\mu_g(V) \not\subset D^{\leq 0}(\xi)$$

が成立する．

系 4.4 M を $\mathbb{CP}^2$ の 2 点ブロー・アップとし，V を例外因子とする．すると V は Ross-Thomas [56] の意味でのスロープ安定性を destabilize する（以下の説明を参照の事）.

ここに，Ross-Thomas [56] の意味でのスロープ安定性とは次のような意味である．V を M の部分概形とする．$\mathcal{M}$ を $M \times \mathbb{C}$ の $V \times 0$ に沿ったブロー・アップとする．どのような V をとっても

中心ファイバーの Donaldson-Futaki 不変量が正（非負）であるとき，M はスロープ安定（半安定）であるという．前系の場合，負になるというのが destabilize するという意味である．

以下に，定理 4.3 の証明の概略を述べる．C^∞-級関数 h を $\mathrm{Ric}_g - \omega_g = i\partial\bar{\partial}h$ をみたすものとする．Monge-Ampère 方程式

$$\frac{\det(g_{i\bar{j}} + \varphi_{i\bar{j}})}{\det(g_{i\bar{j}})} = e^{-t\varphi+h}$$

は $t \in [0, t_0)$，$t_0 < 1$ に対してのみ解を持つとしよう．すると乗数イデアル層があるので，その台を V としよう．

Fact 1：(Nadel, これは Siu と Tian による評価から得られる)
$K \subset M - V$ をコンパクト部分集合とする．$t \to t_0$ のとき，

$$\int_K \omega_{g_t}^m \to 0$$

となる．

Fact 2：

$$\mu_g(p) \in D^{\leq 0}(\xi) \Longleftrightarrow (\mathrm{div}(v_\xi))(p) \geq 0.$$

ただし，

$$\mathrm{div}(v_\xi)\ (e^h\omega^m) = \mathcal{L}_{v_\xi}(e^h\omega^m).$$

Fact 3：

$$\frac{t}{t-1}F(v_\xi) = \int_M \mathrm{div}(v_\xi)\omega_t^m.$$

Fact 3 と我々の仮定 $F(v_\xi) > 0$ より，$t_0 < 1$ を固定し $t \in (\delta, t_0)$ と取る時，t によらない $C > 0$ が存在して

$$\int_M \mathrm{div}(v_\xi)\ \omega_t^m = \frac{t}{t-1}F(v_\xi) < -C$$

が成立する．

$$\mu_g(V) \subset D^{\leq 0}(\xi) = \{\mathrm{div}(v_\xi) \geq 0\}$$

と仮定して矛盾を導こう．十分小さい $\epsilon > 0$ を選び

$$W_\epsilon := \{p \in M | \mathrm{div}(v_\xi)(p) \leq \epsilon\}$$

とおく．すると，$W_\epsilon \subset M - V$ はコンパクトである．W_ϵ に Fact 1 を適用すると $t \to t_0$ のとき

$$\int_{W_\epsilon} \omega_{g_t}^m \to 0$$

を得る．しかし，そうすると $t \to t_0$ のとき，

$$-C \geq \int_M \mathrm{div}(v_\xi)\omega_t^m = \int_{M-W_\epsilon} \mathrm{div}(v_\xi)\omega_t^m + \int_{W_\epsilon} \mathrm{div}(v_\xi)\omega_t^m$$
$$\geq -2\epsilon \mathrm{vol}(M,g)$$

となるから，これは矛盾である．これにより定理 4.3 の証明が得られる．

次に KRS-MIS を考察しよう．M を Fano 多様体とする．$\mathfrak{h}_r(M)$ を $\mathfrak{h}(M)$ の reductive part とする．$\omega_g \in c_1(M)$ とし，v は $\mathfrak{h}_r(M)$ の元とする．このとき (g,v) が Kähler-Ricci ソリトンであるとは

$$\mathrm{Ric}(\omega_g) - \omega_g = \mathcal{L}_v(\omega_g)$$

が成り立つときをいう．このとき，$\Im(v)$ は Killing ベクトル場になる．(Killing ベクトル場とは等長変換を生成するベクトル場のことである．)

初期計量 g^0 を $\omega_0 := \omega_{g^0} \in c_1(M)$ となるものを選ぶ．すると

$$\mathrm{Ric}(\omega_0) - \omega_0 = i\partial\overline{\partial}h_0, \quad \int_M e^{h_0}\omega_0^m = \int_M \omega_0^m$$

となる h_0 が一意的に定まる．また，

$$i_v\omega_0 = i\overline{\partial}\theta_{v,0}, \quad \int_M e^{\theta_{v,0}}\omega_0^m = \int_M \omega_0^m$$

となる $\theta_{v,0}$ も一意的に定まる．$t \in [0,1]$ に対し，Monge-Ampère 方程式

$$\det(g^0_{i\bar{j}} + \varphi_{ti\bar{j}}) = \det(g^0_{i\bar{j}})e^{h_0 - \theta_{v,0} - v\varphi_t - t\varphi_t}$$

を考える．$t=1$ に対する解は Kähler-Ricci soliton を与える．どの v が Ricci ソリトンの解を持つかは次のようにしてわかる．

一般に $\theta_{v,g}$ が

$$i_v\omega_g = i\overline{\partial}\theta_{v,g}, \quad \int_M e^{\theta_{v,g}}\omega_g^m = \int_M \omega_g^m$$

をみたすとき $F_v(w) : \mathfrak{h}(M) \to \mathbb{C}$ を

$$F_v(w) = \int_M w(h_g - \theta_{v,g})e^{\theta_{v,g}}\omega_g^m$$

により定義する．この F_v は $\omega_g \in c_1(M)$ となる g の取り方によらない．この F_v は Kähler-Ricci ソリトンが存在するための障害を与える．

定理 4.5 (Tian-Zhu [66])　任意の $w \in \mathfrak{h}_r(M)$ に対し $F_v(w) = 0$ となる $v \in \mathfrak{h}_r(M)$ が一意的に存在する．

Zhu [69] は $t=0$ に対し常に解を持つ事を示した．また，陰関数定理を用いるとある $\epsilon > 0$ が存在してすべての $t \in [0,\epsilon)$ に対して解が存在することがわかる．

もし $[0,t_\infty)$，$t_\infty < 1$ に対してのみ解が存在するとしよう．すると KRS-MIS が存在する．

定理 4.6 (二木-佐野 [31])　M を Fano 多様体とする．K を $\mathrm{Aut}(M)$ のコンパクト部分群で $\mathrm{Lie}(K) \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{h}_r(M)$ となるものとする．もし M が Kähler-Ricci ソリトンを持たないならば，M

に乗数イデアル層が存在し，その台 V_v は任意の $w \in \mathfrak{h}_r(M)$ に対し

$$V_v \not\subset \mathrm{Zero}^+(w)$$

をみたす．

この定理を用いると $\mathbb{CP}^2$ の１点ブローアップに Kähler-Ricci ソリトンが存在することを証明することができる．

次に KRF-MIS について論じよう．一般に Fano 多様体において正規化された Kähler-Ricci 流

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -\mathrm{Ric}(g) + g$$

は時間 $[0,\infty)$ で存在することが知られている（Cao [6]）．時間 $t \to \infty$ において解が収束しないならば乗数イデアル層が存在することは Phong-Sesum-Sturm [59] が示した．

$g_{ti\bar{j}} = g_{i\bar{j}} + \varphi_{ti\bar{j}}$ とおくと正規化された Kähler-Ricci 流は

$$\frac{\partial \varphi_t}{\partial t} = \log \frac{\det(g_{i\bar{j}} + \varphi_{ti\bar{j}})}{\det(g_{i\bar{j}})} + \varphi_t - h_0$$

$$\varphi_0 = c_0$$

と同値になる．Rubinstein [60] は $t \to \infty$ のとき

$$\varphi_t - \int_M \varphi_t\, \omega^m \longrightarrow \varphi_\infty$$

で φ_∞ は概多重劣調和であることを用いて，Demailly-Kollár のアイデアにより乗数イデアル層を構成し，Phong-Sesum-Sturm [59] の方法を次のように改良した．$\gamma \in (m/(m+1), 1)$ とし，$\psi = \gamma\varphi_\infty$ に対し，

$$\Gamma(U, \mathcal{I}(\psi)) = \{\ f\ \in \mathcal{O}_M(U) \mid \int_U\ |f|^2\ e^{-\psi}\ \omega_g^m < \infty\}$$

により定まる乗数イデアル層を V_γ とする．この乗数イデアル層は任意の $q > 0$ に対し

$$H^q(M, \mathcal{I}(\psi)) = 0$$

をみたす．

最後に佐野の結果 [61] を紹介する．M をトーリック Fano 多様体とする．ここでは $T_{\mathbb{R}} = T^m$, $T_{\mathbb{C}} = (\mathbb{C}^*)^m$ とおき，$N_{\mathbb{R}} = J\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ とする．$W(M) := N(T_{\mathbb{C}})/T_{\mathbb{C}}$ を Weyl group とする．Wang-Zhu [67] により Kähler-Ricci ソリトンが存在するのでこれを (g_{KRS}, v_{KRS}) により表す．

定理 4.7 (佐野 [61])　$\dim N_{\mathbb{R}}^{W(M)} = 1$ とする．ω は $T_{\mathbb{R}}$-不変 Kähler 形式とし，$0 < \gamma < 1$ とする．また $\sigma_t = \exp(tv_{KRS})$ とおく．このとき，Rubinstein の指数 γ の KRF-MIS の台は，$\{(\sigma_t^{-1})^*\omega\}$ の Kähler ポテンシャルから得られる指数 γ の乗数イデアル層の台と一致する．

この結果を用いて，佐野は色々な指数 γ に対する KRF-MIS をいくつかの例に対して計算している．より詳しくは [32] を参照せよ．

5 Ricci ソリトンに関するいくつかの結果について

滑らかな多様体 M 上の Riemann 計量 g は，ある定数 $\gamma \in \mathbb{R}$ とベクトル場 X に対し，

$$2\mathrm{Ric}(g) - \gamma g + \mathcal{L}_X g = 0 \tag{13}$$

をみたすとき Ricci ソリトンであるという．ここに $\mathrm{Ric}(g)$ は g に関する Ricci 曲率を表す．更に，ある滑らかな関数 f を用いて $X = \mathrm{grad} f$ と表されると (13) は

$$2\mathrm{Ric}(g) - \gamma g + \nabla\nabla f = 0 \tag{14}$$

となるが，このとき， g は勾配ソリトンであるという．また，$\gamma < 0$，$\gamma = 0$ または $\gamma > 0$ に従い，それぞれ拡大ソリトン， ステディーソリトン，縮小ソリトンであると呼ばれる．

Ricci ソリトンが与えられたとき，時間 t に依存するベクトル場

$$Y_t := -\frac{1}{2\gamma t} X \tag{15}$$

により生成される流れ φ_t で引き戻して得られる計量

$$g(t) = -2\gamma t \varphi_t^* g \tag{16}$$

は Ricci 流

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -2\mathrm{Ric}(g_t) \tag{17}$$

の解になる．Ricci 流が有限時間で特異点を形成したとき，特異点の近傍を rescale して得られるものが Ricci ソリトンである (例えば [36] を参照せよ)．この意味で Ricci ソリトンは Ricci 流の自己相似解であると呼ばれる．

コンパクト多様体上の Ricci ソリトンに関し，次のことが知られている．

命題 5.1 (Perelman [57]) コンパクト多様体上の Ricci ソリトンはすべて勾配ソリトンである．

命題 5.2 (Hamilton [35], Ivey [37]) コンパクト多様体上の勾配ソリトンで Einstein 計量ではないものは，4 次元以上の多様体上の縮小ソリトンである．

コンパクト多様体上の Ricci ソリトンの例で知られているものは，現時点では次のような Kähler-Ricci ソリトンのみである．例えば小磯 [39] と Cao [7] による構成では Kähler-Einstein 多様体上の $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$-束になっている．また Wang-Zhu [67] による構成ではトーリック Fano 多様体上での構成になっている．この他 Wang-Zhu の拡張である Podesta-Spiro [58] は 旗多様体上のトーリック Fano 多様体束での構成になっている．Kähler-Ricci ソリトンではない構成の試みについては [11] を見よ．

筆者と佐野は，Einstein 多様体でないコンパクト Ricci ソリトンに対し，次のような下からの直径の評価を得た．

定理 5.3 ([33]) M を 4 次元以上のコンパクト多様体とする．g が Einstein 計量ではない勾配縮小 Ricci ソリトンで (13) をみたしているとき，直径 d_g につき

$$d_g \geq \frac{10\pi}{13\sqrt{\gamma}} \tag{18}$$

が成り立つ．

正の Ricci 曲率を持つ Einstein 多様体 (M, g) の直径 d_g の上からの評価については次の Meyers の定理が知られている．

定理 5.4 (Meyers) n-次元リーマン多様体 (M, g) において $\mathrm{Ric}(g) \geq \gamma g$, $\gamma > 0$, ならば

$$d_g \leq \sqrt{\frac{n-1}{\gamma}}\pi \tag{19}$$

が成り立つ．

この定理は仮定 $\mathrm{Ric}(g) \geq \gamma g$, $\gamma > 0$, のもとに，多様体 M はコンパクトであることを意味する．しかし，完備縮小 Ricci ソリトンがコンパクトであるとは限らない．例えば $\mathbb{R}^n$ の原点からの距離を r とし，$X = r\partial/\partial r$ とすると $\mathbb{R}^n$ の標準的平坦計量は縮小ソリトンである（Gaussian ソリトンと呼ばれる）から，これが反例である．しかし X の長さが有界ならコンパクトである（[21]）．また縮小 Ricci ソリトンを持つコンパクト多様体の基本群は有限群である（[21], [14]）．定理 5.3 の証明は次の２つのステップからなる．

Step 1： $R_{ij} - \gamma g_{ij} + \nabla_i\nabla_j f = 0$ をみたすコンパクト縮小勾配 Ricci ソリトンに対し，２階偏微分作用素 Δ_f を

$$\Delta_f u = \Delta u - \nabla^i f \nabla_i u \ (= \ g^{ij}(\nabla_i\nabla_j u - \nabla_i f \nabla_j u))$$

により定義する．f を

$$\int_M f e^{-f} dV_g = 0$$

と正規化すると f は -2γ を固有値とする Δ_f の固有関数になる：

$$\Delta_f f + 2\gamma f = 0.$$

Step 2： ある 0 でない $u \in C^\infty(M)$ に対し $\Delta_f u + \lambda u = 0$ が成り立つならば

$$\lambda \geq \frac{\pi^2}{d_g^2} + \frac{31}{100}\gamma$$

が成り立つ．

Step 1 と Step2 から

$$2\gamma \geq \frac{\pi^2}{d_g^2} + \frac{31}{100}\gamma$$

を得るので，定理 5.3 は直ちに従う．次に Step 2 の証明のアイデアを述べる．まず，Ricci 曲率と Δ の固有値との関係につき次の結果が知らている．

定理 5.5 (Ling[42]) $\mathrm{Ric} \geq \gamma g$ をみたすコンパクト Riemann 多様体において，ある 0 でない $u \in C^\infty(M)$ に対し $\Delta u + \lambda u = 0$ が成り立つならば

$$\lambda \geq \frac{\pi^2}{d_g^2} + \frac{31}{100}\gamma$$

が成り立つ．

この定理に次の "Bakry-Émery principle"（例えば [44] を参照せよ）を適用することにより Step 2 の証明が得られる．何らかの理由により体積要素 dV_g を $e^{-f}dV_g$ に置き換えなければならないとしよう．そのような場合にはラプラシアン Δ を $\Delta_f := \Delta - \nabla f \cdot \nabla$ に，Ricci 曲率 Ric を $\mathrm{Ric}_f := \mathrm{Ric} + \nabla\nabla f$ に置き換える．そうすると $(dV_g, \Delta, \mathrm{Ric})$ に対して成立する結果は $(e^{-f}dV_g, \Delta_f, \mathrm{Ric}_f)$ に対しても成立する．この "principle" は次のような Bochner-Weitzenböck 公式の拡張に基づく：

$$\Delta_f |\nabla u|^2 - 2\langle \nabla u, \nabla \Delta_f u\rangle = 2|\nabla^2 u|^2 + 2(Ric + \nabla\nabla f)(\nabla u, \nabla u). \tag{20}$$

次に，二木-小野-Wang [30] によって得られた佐々木・Einstein 計量の存在の応用として得られる，Kähler-Ricci 流の永遠解の存在について述べたい．M を m 次元トーリック Fano 多様体とする．$L \to M$ を $K_M = L^{-p}$，$p \in \mathbb{Z}_+$，と書ける正則直線束とする．二木-小野-Wang [30] では L^{-k} に同伴する $U(1)$-束に佐々木・Einstein 計量が存在することを証明した．このことは $L^{-k} -$ (zero section) 上に Ricci 平坦 Kähler 錐計量が存在することと同値である．

定理 5.6 ([34]) 自然数 k を $0 < k < p$ をみたすものとする．

(1) $L^{-k} -$ (zero section) に縮小ソリトンが存在する．（対応する Kähler-Ricci ソリトンは $t < 0$ で存在する．）

(2) $L^{-k} -$ (zero section) に拡大ソリトンが存在する．（対応する Kähler-Ricci ソリトンは $t > 0$ で存在する．）

(3) $t = 0$ における $L^{-k} -$ (zero section) 上の Ricci 平坦錐計量をつなぎ目として (1) と (2) で得られた Kähler-Ricci 流は滑らかにつながり $(L^{-k} - \text{(zero section)}) \times (-\infty, \infty)$ 上の永遠解を得る．

(1) と同じ構成により，$p < k$ に対して $L^{-k} -$ (zero section) に拡大ソリトンを構成することができる．佐々木多様体が quasi-regular な場合，つまり Reeb ベクトル場が生成する流れの軌道がすべて閉じる場合は，L^{-k} の零切断まで計量は延びていることが確かめられる．quasi-regular でない場合も延びていると思われるが，正しいかどうか見ることが現時点ではできない．以上の結果は次の Feldman-Ilmanen-Knopf [20] の結果の拡張として得られる．M を $\mathbb{CP}^m$，$L^{-1} = \mathcal{O}(-1)$ とする．この場合，(2) は Cao [7] により構成されたもので，計量は $\mathbb{C}^{m+1}$ まで滑らかに延びている．(1) は Feldman-Ilmanen-Knopf [20] により構成されたもので，零切断まで計量は延びている．従って，全体としては

$$L^{-1} \times (-\infty, 0) \cup (\mathbb{C}^{m+1} - \{\mathbf{0}\}) \times \{\mathbf{0}\} \cup \mathbb{C}^{\mathbf{m+1}} \times (\mathbf{0}, \infty)$$

上で滑らかに定義された解である．$\{\mathbf{0}\} \times \{\mathbf{0}\}$ のみが特異点である．

文 献

[1] C. Arezzo and F. Pacard, Blowing up Kahler manifolds with constant scalar curvature. II. Ann. of Math. (2) 170 (2009), no. 2, 685–738.

[2] S. Bando : An obstruction for Chern class forms to be harmonic, Kodai Math. J., 29(2006), 337–345.

[3] V.V. Batyrev and E.N. Selivanova, Einstein-Kähler metrics on symmetric toric Fano manifolds,

J. Reine Angew. Math. **512** (1999), 225–236.

[4] C.P. Boyer, K. Galicki and J. Kollár : Einstein metrics on spheres. Ann. of Math., 162(2005), 557–580.

[5] E. Calabi, Extremal Kähler metrics II, Differential geometry and complex analysis, (I. Chavel and H.M. Farkas eds.), 95–114, Springer-Verlag, Berline-Heidelberg-New York, (1985).

[6] H. -D. Cao : Deformation of Kähler metrics to Kähler-Einstein metrics on compact Kähler manifolds. Invent. Math., 81(1985), 359–372.

[7] H.-D. Cao, Existence of gradient Kähler-Ricci solitons, Elliptic and Parabolic Methods in Geometry (Minneapolis, MN, 1994), A. K. Peters (ed.), Wellesley, MA, 1996, 1–16.

[8] H. Cartan : La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibre principal. (French) Colloque de topologie (espaces fibres), Bruxelles, 1950, pp. 57–71.

[9] X. Chen and G. Tian, *Geometry of Kähler metrics and foliations by holomorphic discs,* Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **107** (2008), 1–107.

[10] K. Cho, A. Futaki and H. Ono : Uniqueness and examples of compact toric Sasaki-Einstein metrics, Comm. Math. Phys., 277 (2008), 439–458.

[11] A.S. Dancer, S.J. Hall and M.Y. Wang : Cohomogeneity one shrinking Ricci solitons: an analytic and numerical study, preprint, arXiv:1105.6195.

[12] A. Della Vedova and F. Zuddas, Scalar curvature and asymptotic Chow stability of projective bundles and blowups, preprint, arXiv:1009.5755.

[13] J.P. Demailly and J. Kollár : Semi-continuity of complex singularity exponents and Kähler-Einstein metrics on Fano orbifolds, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 34, no.4 (2001) 525–556.

[14] A. Derdzinski : A Myers-type theorem and compact Ricci solitons. Proc. Am. Math. Soc. 134(2006), 3645–3648.

[15] S.K. Donaldson : Remarks on gauge theory, complex geometry and four-manifold topology, in 'Fields Medallists Lectures' (Atiyah, Iagolnitzer eds.), World Scientific, 1997, 384–403.

[16] S.K. Donaldson : Scalar curvature and projective embeddings, I, J. Differential Geometry, **59** (2001), 479–522.

[17] S.K. Donaldson : Scalar curvature and stability of toric varieties, J. Differential Geometry, **62** (2002), 289–349.

[18] S.K. Donaldson : Lower bounds on the Calabi functional, J. Differential Geometry, **70** (2005), 453–472.

[19] S.K. Donaldson : Constant scalar curvature metrics on toric surfaces, Geom. Funct. Anal. 19 (2009), no. 1, 83–136.

[20] M. Feldman, T. Ilmanen and D. Knopf : Rotationally symmetric shrinking and expanding gradient Kähler-Ricci solitons, J. Differential Geometry, 65(2003), 169–209.

[21] M. Fernández-López and E. García-Río : A remark on compact Ricci solitons, Math. Ann. 340 (2008), no. 4, 893–896.

[22] A. Futaki, An obstruction to the existence of Einstein Kähler metrics, Invent. Math. **73** (1983), 437–443 .

[23] A. Futaki : On compact Kähler manifolds of constant scalar curvature, Proc. Japan Acad., Ser. A, **59**, 401–402 (1983).

[24] A. Futaki, Asymptotic Chow semi-stability and integral invariants, Intern. J. Math., **15** (2004), 967–979.

[25] A. Futaki : Asymptotic Chow polystability in Kähler geometry, to appear in Fifth International Congress of Chinese Mathematicians (ICCM 2010), AMS/IP Studies in Advanced Mathematics , Volume 51, 2011. arXiv:1105.4773.

[26] A. Futaki, K.Hattori and L.Ornea : An integral invariant from the view point of locally conformally Kähler geometry, to appear in Manuscripta Math., arXiv:1105.4774.

[27] A. Futaki and S. Morita : Invariant polynomials of the automorphism group of a compact complex manifold, J. Differential Geom., **21**, 135–142 (1985).

[28] A. Futaki and H. Ono : Einstein metrics and GIT stability, Sugaku Expositions, 24(2011), 93–122. (Translated from Sugaku, 60(2008), 175–202 in Japanese.)

[29] A. Futaki, H. Ono and Y. Sano : Hilbert series and obstructions to asymptotic semistability, Adv. Math. 226 (2011), no. 1, 254–284.

[30] A. Futaki, H. Ono and G. Wang : Transverse Kähler geometry of Sasaki manifolds and toric Sasaki-Einstein manifolds, J. Differential Geometry, 83(2009), 585–636.

[31] A. Futaki and Y. Sano : Multiplier ideal sheaves and integral invariants on toric Fano manifolds, Math. Ann. 350 (2011), no. 2, 245–267.

[32] A. Futaki and Y. Sano : Multiplier ideal sheaves and geometric problems, "Variational Problems in Differential Geometry (Eds. R. Bielawski, K. Houston and M. Speight)", LMS Lecture Notes series, 394(October 2011), 68–93, Cambridge University Press.

[33] A. Futaki and Y. Sano : Lower diameter bounds for compact shrinking Ricci solitons, preprint, arXiv:1007.1759.

[34] A. Futaki and M.-T. Wang : Constructing Kähler-Ricci solitons from Sasaki-Einstein manifolds, Asian J. Math. 15 (2011), no. 1, 33–52.

[35] R.S. Hamilton, The Ricci flow on surfaces. Mathematics and general relativity (Santa Cruz, CA, 1986), 237–262, Contemp. Math., 71, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.

[36] R.S. Hamilton, The formation of singularities

in the Ricci flow, Surveys in Differential Geometry (Cambridge, MA, 1993), 2, International Press, Combridge, MA, 1995, 7–136.

[37] T. Ivey, Ricci solitons on compact three-manifolds. Differential Geom. Appl. 3 (1993), no. 4, 301–307.

[38] Y. Kamishima and L. Ornea : Geometric flow on compact locally conformally Kähler manifolds, Tohoku Math. J., 57 (2005), no. 2, 201–221.

[39] N. Koiso, On rotationally symmetric Hamilton's equation for Kähler-Einstein metrics. Recent topics in differential and analytic geometry, 327–337, Adv. Stud. Pure Math., 18-I, Academic Press, Boston, MA, 1990.

[40] J. Kollár : Einstein metrics on connected sums of $S^2 \times S^3$, J. Differential Geom. 75 (2007), no. 2, 259–272.

[41] A. Lichnerowicz, Géometrie des groupes de transformations, Dunod, Paris (1958).

[42] J. Ling, Lower bounds of the eigenvalues of compact manifolds with positive Ricci curvature, Ann. Global Anal. Geom. 31 (2007), no. 4, 385–408.

[43] C.J. Liu : Bando-Futaki invariants on hypersurfaces, Trans. Amer. Math. Soc. 362 (2010), no. 6, 2923–2962.

[44] Z. Lu and J. Rowlette : Eigenvalues of collapsing domains and drift Laplacians, arXiv:1003.0191.

[45] T. Mabuchi, An obstruction to asymptotic semi-stability and approximate critical metrics, Osaka J. Math., **41** (2004), 463–472.

[46] T. Mabuchi, An energy-theoretic approach to the Hitchin-Kobayashi correspondence for manifolds, I, Invent. Math. **159** (2005), 225–243.

[47] T. Mabuchi : Chow-stability and Hilbert-stability in Mumford's geometric invariant theory, Osaka J. Math. 45 (2008), no. 3, 833–846.

[48] T. Mabuchi : K-stability of constant scalar curvature polarization. arXiv:0812.4093.

[49] Y. Matsushima, Sur la structure du groupe d'homéomorphismes d'une certaine variété kaehlérienne, Nagoya Math. J., **11** (1957), 145–150.

[50] A. Nadel : Multiplier ideal sheaves and existence of Kähler-Einstein metrics of positive scalar curvature, Ann. of Math., **132**, 549-596 (1990).

[51] A.M. Nadel : Multiplier ideal sheaves and Futaki ' s invariant, Geometric Theory of Singular Phenomena in Partial Differential Equations (Cortona, 1995), Sympos. Math., XXXVIII, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998. (1995) 7–16.

[52] B. Nill and A. Paffenholz : Examples of non-symmetric Kähler-Einstein toric Fano manifolds, preprint. arXiv:0905.2054.

[53] Y. Odaka : A generalization of Ross-Thomas' slope theory, preprint, arXiv:0910.1794.

[54] Y. Odaka : The Calabi conjecture and K-stability, IMRN, no. 13 (2011).

[55] H.Ono, Y.Sano and N.Yotsutani : An example of asymptotically Chow unstable manifolds with constant scalar curvature, to appear in Annales de L'Institut Fourier.

[56] J. Ross and R.P. Thomas, *An obstruction to the existence of constant scalar curvature Kähler metrics,* J. Differential Geom. **72** (2006), no. 3, 429–466.

[57] G. Perelman, The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, arXiv:math.DG/0211159 v1 2002.

[58] F. Podesta and A. Spiro : Kähler-Ricci solitons on homogeneous toric bundles, J. Reine Angew. Math. 642 (2010), 109–127.

[59] D.H. Phong, N. Sesum and J. Sturm : Multiplier ideal sheaves and the Kähler-Ricci flow, Comm. Anal. Geom. 15, no. 3 (2007), 613–632.

[60] Y.A. Rubinstein : On the construction of Nadel multiplier ideal sheaves and the limiting behavior of the Ricci flow, Trans. Amer. Math. Soc. 361 (2009), no. 11, 5839–5850.

[61] Y. Sano : Multiplier ideal sheaves and the Kähler-Ricci flow on toric Fano manifolds with large symmetry, preprint, arXiv:0811.1455.

[62] Y.-T. Siu : The existence of Kähler-Einstein metrics on manifolds with positive anticanonical line bundle and a suitable finite symmetry group, Ann. of Math., **127**, 585-627 (1988).

[63] J. Stoppa, K-stability of constant scalar curvature Kähler manifolds : Adv. Math., **221** (2009), 1397–1408.

[64] G. Tian : Kähler-Einstein metrics on certain Kähler manifolds with $C_1(M) > 0$, Invent. Math., **89**, 225-246 (1987)

[65] G. Tian, Kähler-Einstein metrics with positive scalar curvature : Invent. Math., **130** (1997), 1–37.

[66] G. Tian and X. Zhu : A new holomorphic invariant and uniqueness of Kähler-Ricci solitons, Comment. Math. Helv., 77 (2002), 297-325.

[67] X.-J. Wang and X. Zhu : Kähler-Ricci solitons on toric manifolds with positive first Chern class, Adv. Math., 188 (2004), no. 1, 87–103.

[68] S.-T. Yau, Open problems in Geometry : Proc. Symp. Pure Math. **54** (1993), 1–28.

[69] X. Zhu, Kähler-Ricci soliton type equations on compact complex manifolds with $C_1(M) > 0$, J. Geom. Anal., 10 (2000), 759-774.

(２０１１年 １１月 ７日提出)

(ふたきあきと・東京工業大学大学院理工学研究科)