論　説

Einstein 計量と GIT 安定性

二　木　昭　人
小　野　　　肇

1　はじめに

Teichmüller 空間の研究に Riemann 面の定曲率計量が用いられるように，Kähler 多様体に何らかの意味で標準計量を与えることは重要である．そのような結果の代表的なものは 1977 年に発表された Yau による Calabi 予想の証明であろう ([62])．この結果から $c_1(M)=0$ となるコンパクト Kähler 多様体 M には Ricci 曲率が恒等的に 0 となる Kähler 計量（Ricci 平坦計量ともいう）が各 Kähler 類に一意的に存在することがわかる．このことから $c_1(M)=0$ なるコンパクト Kähler 多様体は Calabi-Yau 多様体と呼ばれるようになった．$c_1(M)<0$ なるコンパクト Kähler 多様体の場合，つまり第１ Chern 類が負定値な Hermite 行列を係数とする実 $(1,1)$ 形式で代表される場合も，Ricci 曲率が計量 g の -1 倍に等しいような Kähler 計量，つまり負の Kähler-Einstein 計量が存在することが Aubin [2] と Yau により独立に Calabi 予想と同時期に証明された．一方 $c_1(M)>0$ の場合には，Kähler-Einstein 計量が存在するためには色々な障害があることが知られていて，現在でも完全な理解は得られていない問題である．$c_1(M)>0$ なる多様体は Fano 多様体と呼ばれる．実際松島与三 ([50]) によればコンパクトな Kähler-Einstein 多様体の正則ベクトル場全体のなす複素 Lie 環 $\mathfrak{h}(M)$ は簡約可能 (reductive) である．また二木の結果 [29] によると，ある Lie 環準同型 $f:\mathfrak{h}(M)\to\mathbb{C}$ が存在して，もし M が Kähler-Einstein 計量を許すならば $f=0$ となる．したがって，この２つの結果は Kähler-Einstein 計量が存在するための障害を与える．一方，Yau は $c_1(M)>0$ の場合は幾何学的不変式論（以下 GIT と略す）の意味の安定性が Kähler-Einstein 計量が存在するための条件であろうと予想していた（[63]）．この事情を説明するために，正則ベクトル束に Hermitian-Einstein 計量を与える問題を思い出そう．Kähler 曲面上の正則ベクトル束に Hermitian-Einstein 計量を与えることができればそれは反自己双対計量の特別な場合になることから，1980 年代前半のゲージ理論を用いた４次元多様体の一連の研究のなかで Donaldson により，次のことが証明された．コンパクト Kähler 曲面上の正則ベクトル束 E が Hermitian-Einstein 計量を持つための必要十分条件は，Mumford-竹本の意味で安定（GIT 安定性の１種）であることである．高次元のコンパクト Kähler 多様体上の正則ベクトル束の場合も同様の結果が Uhlenbeck と Yau の共同研究によって得られている．これらの結果についての詳細は [25] を参照せよ．Yau の $c_1(M)>0$ の場合の予想はこのベクトル束の場合と同様，多様体の場合も GIT 安定性が鍵になるはずであるというものである．

GIT 安定性が必要条件であることを最初にきちんとした形で証明したのは Tian [56] である．Tian は K-安定性という概念を導入し， Kähler-Einstein 計量が存在するような Fano 多様体は K-安定であることを示した．K-安定の定義は，代数多様体としての退化を考え，退化した代数多様体に対する f

を安定性を量る指数として用いることにより定義される．また Tian は同時に，満渕俊樹の定義した満渕 K-energy （以下満渕 energy と呼ぶ）が Kähler 計量全体の空間上である意味で “固有” であることと Kähler-Einstein 計量の存在が同値であることも証明した．満渕 energy は Kähler 計量全体の空間上のある楕円型作用素の行列式直線束の Quillen 計量の log を取ったものにあたる (Tian，[55] 参照)．一方 Kähler 計量全体の空間はシンプレクティック微分同相群の軌道とみなせ，満渕 energy の凸性が安定性とある意味で同値になる．したがって満渕 energy の固有性も GIT 安定性との関係を示唆するものになっている．また，このような説明は Hermitian-Einstein 計量の研究の場合にはすでになされていた（[25]）．一方，藤木 [28] と Donaldson [21] はモーメント写像を用いた GIT 安定性の描像に従い，スカラー曲率一定計量の存在と GIT 安定性の関係を説明した．

以上の事実の解説は本誌の論説記事として二木 [30]（1992 年）と板東 [4]（1998 年）にある程度書かれている．また中島の本 [52]（1999 年） にも詳しく書かれている．そこで本論説はそれ以降の発展について書くことにする．しかし，Donaldson の二つの論文 [22]（2001 年）と [23]（2002 年）以降この分野での論文が急速に増え，本論説ですべてをカバーすることは到底不可能である．本稿では著者らの結果および興味に基づいて執筆することとするので，かなりの片寄りがあり，他の重要な仕事を取り上げないことを断っておく．

以下，第 2 節以降で取り上げる内容の概略をのべる．第 2 節では，上述の藤木と Donaldson によるモーメント写像を用いた安定性の描像においてスカラー曲率がモーメント写像として現れることを述べる．このことが示すように，Kähler-Einstein 計量よりも定スカラー曲率 Kähler 計量，さらには extremal Kähler 計量の方が GIT 安定性と直接的に結びつく．松島の定理， Lie 環準同型 f は最初 Kähler-Einstein 計量の存在の障害として得られたが，定スカラー曲率 Kähler 計量の存在の障害としても拡張されている．また松島の定理は extremal Kähler 計量を持つ多様体の正則ベクトル場全体のなす Lie 環の分解定理として Calabi により拡張されている（[15]）．これらの結果もモーメント写像を用いた描像の有限次元モデルのなかで説明できることを見る．また，Lie 環準同型 f は高次 Chern 類が調和形式で代表されるための障害として拡張される（[3]）ことに注目し，高次 Chern 形式を組み入れてスカラー曲率を摂動することにより摂動 extremal Kähler 計量を考える．するとこの場合も有限次元モデルが効果的に機能し，成り立つべき結果を正しく示唆することを見る（[33], [34]）．

第 3 節では代数幾何で良く知られた安定性の一つである漸近的 Chow 半安定性と定スカラー曲率 Kähler 計量の存在の関係について述べる．まず [31] に基づき Lie 環準同型 f は漸近的 Chow 半安定性の障害として現れることを見る．次に，Donaldson（[22]）等により得られた結果を紹介する．

第 4 節では K 安定性と定スカラー曲率 Kähler 計量の存在についての予想について述べる．Lie 環準同型 f の定義は Donaldson により代数幾何的に定義し直され，その新しい f の定義のもとに K-安定性も定義し直され，もし M が定スカラー曲率 Kähler 計量を持つならば K 半安定であることが示されている（[17]，[24]）．Donaldson の定義では M と豊富な直線束 L の組，すなわち偏極多様体に対し，K-安定性が定義されるが，一般の Kähler 多様体の場合も Kähler 計量全体の空間上の測地線とそれにそった満渕 energy の振る舞いを用いて K-安定性が定義できる．現在では，この K-安定性が定スカラー曲率 Kähler 計量が存在するための必要十分条件であろうと予想されている．

最後に第 5 節では，佐々木多様体上の Einstein 計量，佐々木-Einstein 計量の存在問題について論

ずる．佐々木-Einstein 計量は超弦理論の AdS/CFT 対応で重要な役割を果たすもので，近年物理でも数学でも研究されている対象である．佐々木多様体とは接触構造を持つ Riemann 多様体の一種で，従って奇数次元である．接触構造から決まる Reeb ベクトル場は横断的 Kähler 葉層構造を定める．佐々木多様体が Einstein 多様体であれば必然的に正の Ricci 曲率を持ち，したがって多様体は完備ならコンパクトである．更に，横断的 Kähler 構造も正の Kähler-Einstein 計量を持つ．M を Fano 多様体とし，S を M の標準直線束の同伴 $U(1)$-束の全空間とすると S は佐々木多様体になる．M の正則ベクトル場が 0 しか存在しない場合，S に佐々木-Einstein 計量を見つけることは M に Kähler-Einstein 計量を見つけることと全く同じになる．したがって，この場合，安定性が関係してくることは明らかである．しかし，M が自明でないトーラス作用を許容すれば，Reeb ベクトル場の変形にともなう佐々木構造の変形があるため，佐々木-Einstein 計量が存在しうる余地が大きくなる．実際，筆者らは $(m+1)$ 次元トーラスの作用を許す $(2m+1)$ 次元佐々木多様体で "高さ一定のトーリックダイアグラム" で記述されるものは佐々木-Einstein 計量を持つことを証明した ([36], [19])．特にトーリック Fano 多様体の標準直線束に同伴する $U(1)$-束の全空間は佐々木-Einstein 計量を持つ．このことを応用すると任意の自然数 k に対し，$S^2 \times S^3$ を k 個連結和をとった 5 次元多様体 $k(S^2 \times S^3)$ は可算無限個の変形同値でないトーリック佐々木-Einstein 計量を持つことが証明できる ([19])．また別の応用として，トーリック Fano 多様体の標準直線束の全空間には完備な Ricci 平坦計量が存在することも証明できる ([35]).

2 シンプレクティック幾何とスカラー曲率

(Z, Ω) を Kähler 多様体とし，コンパクト Lie 群 K が正則等長変換群として Z に作用しているとする．K の複素化 K^c は Z に正則自己同型として作用する．K と K^c の作用は Lie 環 $\mathfrak{k}$ と $\mathfrak{k}^c$ から Z 上の滑らかな実ベクトル場のなす Lie 環 $\Gamma(TZ)$ への準同型を定める．これらをどちらも ρ により表すことにすると $\xi,\ \eta \in \mathfrak{k},\ \xi + i\eta \in \mathfrak{k}^c$ とするとき

$$\rho(\xi + i\eta) = \rho(\xi) + J\rho(\eta)$$

となる．ただし J は Z の複素構造である．$[\Omega]$ を整係数コホモロジーから来る de Rham 類とし，正則直線束 $L \to Z$ を $c_1(L) = [\Omega]$ なるものとする．L^{-1} の Hermite 計量 h で，その Hermite 接続の接続形式 θ が

$$-\frac{1}{2\pi} d\theta = \pi^*\Omega$$

を満たすものが存在する．ただし $\pi : L^{-1} \to Z$ は射影である．K^c の作用を L^{-1} に持ち上げるとモーメント写像 $\mu : Z \to \mathfrak{k}^*$ が定まる（[25], section 6.5 を参照せよ）．$p \in L^{-1} -$ zero section，$x \in Z$ は $\pi(p) = x$ をみたすとする．$\Gamma = K^c \cdot x$ により $x \in Z$ を通る K^c-軌道を表し，$\widetilde{\Gamma} = K^c \cdot p$ により $p \in L^{-1}$ を通る K^c-軌道を表す．$x \in Z$ が K^c-作用に関し **polystable** であるとは $\widetilde{\Gamma}$ が L^{-1} において閉集合であるときをいう．$\widetilde{\Gamma}$ 上の関数 $\ell : \widetilde{\Gamma} \to \mathbb{R}$ を

$$\ell(\gamma) = \log |\gamma|^2$$

により定義する．ただし右辺の $|\gamma|^2$ は Hermite 計量 h を用いている．次のことはよく知られている

(これも [25], section 6.5 を参照せよ).

- ℓ が臨界点を持つための必要十分条件はモーメント写像 $\mu : Z \to \mathfrak{k}^*$ が Γ 上で零点を持つことである.
- ℓ は凸関数である.

この 2 つのことから次の命題が従う.

命題 2.1　点 $x \in Z$ が K^c-作用に関し polystable であるための必要十分条件はモーメント写像 μ が Γ 上で零点を持つことである.

命題 2.2　モーメント写像の Γ 上の零点集合 $\{x \in \Gamma \mid \mu(x) = 0\}$ の連結成分は高々一つである．また，$\{x \in \Gamma \mid \mu(x) = 0\}$ が空でないとき，関数 ℓ は $\{p \in \widetilde{\Gamma} \mid \mu(\pi(p)) = 0\}$ 上で最小値を取り，特に下から有界である.

点 $x \in Z$ を固定し，$\mu(x) : \mathfrak{k} \to \mathbb{R}$ を $\mathbb{C}$-線形に拡張したものを $\mu(x) : \mathfrak{k}^c \to \mathbb{C}$ とする．K および K^c の x における固定部分群を K_x および $(K^c)_x$ により表し，その Lie 環を $\mathfrak{k}_x$ および $(\mathfrak{k}^c)_x$ により表す．$f_x : (\mathfrak{k}^c)_x \to \mathbb{C}$ を $\mu(x) : \mathfrak{k}^c \to \mathbb{C}$ の $(\mathfrak{k}^c)_x$ への制限とする．$(K^c)_{gx} = g(K^c)_x g^{-1}$ であることに注意せよ．以下の命題 2.3，2.4 の証明は [61] または [32] を見よ.

命題 2.3 ([61])　点 $x_0 \in Z$ を固定する．このとき $x \in K^c \cdot x_0$ に対し，f_x は K^c-同変である，すなわち $f_{gx}(Y) = f_x(Ad(g^{-1})Y)$ をみたす．したがって特に，もし f_x がある点 $x \in K^c \cdot x_0$ で 0 になるならば，すべての $x \in K^c \cdot x_0$ において 0 になる．さらに $f_x : (\mathfrak{k}^c)_x \to \mathbb{C}$ は Lie 環準同型になる.

$\mathfrak{k}$ に K-不変内積を与える．すると同一視 $\mathfrak{k} \cong \mathfrak{k}^*$ が得られ，$\mathfrak{k}^*$ もまた K-不変内積を持つ．$\phi(x) = |\mu(x)|^2$ とおくことにより得られる関数 $\phi : K^c \cdot x_0 \to \mathbb{R}$ を考える．ϕ の臨界点 $x \in K^c \cdot x_0$ を **extremal point** と呼ぶことにする.

命題 2.4 ([61])　$x \in K^c \cdot x_0$ を extremal point とすると，Lie 環の分解

$$(\mathfrak{k}^c)_x = (\mathfrak{k}_x)^c \oplus \sum_{\lambda > 0} \mathfrak{k}^c_\lambda$$

が得られる．ここに $\mathfrak{k}^c_\lambda$ は $\mathrm{ad}(\sqrt{-1}\mu(x))$ の λ-固有空間であり，$\sqrt{-1}\mu(x)$ は $(\mathfrak{k}_x)^c$ の中心に属する．特に $(\mathfrak{k}_x)^c = (\mathfrak{k}^c)_x$ となるための必要十分条件は $\mu(x) = 0$ であることである.

以上の結果を Kähler 多様体の幾何に適用したい．そこで Kähler 幾何の基本事項を復習しておこう．コンパクト Kähler 多様体 M の Kähler 計量 $g = (g_{i\bar{j}})$ はスカラー曲率 S の勾配ベクトル場の $(1,0)$-部分

$$\mathrm{grad}^{1,0} S = \sum_{i,j=1}^m g^{i\bar{j}} \frac{\partial S}{\partial z^{\bar{j}}} \frac{\partial}{\partial z^i}$$

が正則ベクトル場であるとき **extremal Kähler 計量** であるという．extremal Kähler 計量は固定した Kähler 類に属する Kähler 計量全体のなす空間上の汎関数

$$g \mapsto \int_M |S|^2 dV_g$$

の臨界点である．もしスカラー曲率が一定なら，その勾配ベクトル場は 0 であり，特に正則であるか

ら計量は extremal Kähler 計量である．Kähler-Einstein 計量はその Ricci 曲率

$$R_{i\bar{j}} = -\frac{\partial^2}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \log\det g$$

が Kähler 計量 g に比例するようなもののことである．比例定数を k とすれば

$$R_{i\bar{j}} = k g_{i\bar{j}} \tag{1}$$

と書かれ，このような計量はスカラー曲率一定であるから特に extremal Kähler 計量である．一方，Ricci 形式

$$\rho_g = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \sum_{i,j=1}^{m} R_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j$$

は第 1 Chern 類 $c_1(M)$ を de Rham 類として代表する．よって k の符号に従い，$c_1(M)$ は正定値，0 または負定値の $(1,1)$ 型微分形式で代表されるということになる．これらの各々の場合を $c_1(M) > 0$, $c_1(M) = 0$ または $c_1(M) < 0$ であると言い表す．このとき，M が Kähler-Einstein 計量を持つための必要条件はこの 3 つの条件のいずれかが成立することである．これの逆が正しいかという問題は，負と 0 のときは解決されていて，正の場合が未解決であるといったことは第 1 節に書いた通りである．

上述の通り，Kähler 幾何における通常の議論では extremal Kähler 計量に関する変分問題について考える場合，複素構造は固定し，更にある Kähler 形式 ω_0 の属する de Rham 類 $[\omega_0]$ を固定して考え，そのもとに任意に Kähler 形式 $\omega \in [\omega_0]$ を動かして考える．これに対し，すぐ後でモーメント写像を考えるときは，ω_0 を固定し，ω_0 と両立する複素構造 J を動かす．実はこの状況で変分問題を考えても extremal Kähler 計量が得られる．ところが，あとで考察する摂動スカラー曲率については J についての変分問題として摂動 extremal Kähler 計量は得られるが，ω についての変分問題からは摂動 extremal Kähler 計量は得られないことがわかる（[33], [34]）．

M の正則ベクトル場全体のなす複素 Lie 環 を $\mathfrak{h}(M)$ により表し，

$$\mathfrak{h}_0(M) = \{X \in \mathfrak{h}(M) \,|\, X \text{ は零点を持つ }\}$$

とおく．このとき， $X \in \mathfrak{h}_0(M)$ に対し滑らかな複素数値関数 u_X で

$$i(X)\omega = -\bar{\partial} u_X \tag{2}$$

をみたすものが一意的に存在することが知られている．この意味で $\mathfrak{h}_0(M)$ は正則 Hamilton ベクトル場全体と一致する．Hamilton 関数 u_X は常に

$$\int_M u_X\, \omega^m = 0 \tag{3}$$

と正規化しておくことにする．

(M, ω_0, J_0) をコンパクト Kähler 多様体とする．ただし ω_0 は Kähler 形式とし，J_0 は複素構造とする．また，$\dim_{\mathbb{R}} M = 2m$ とする．以下 ω_0 は固定したシンプレクティック形式とみなし，複素構造を動かすことにする．Z を ω_0 と両立する複素構造 J の全体とする．ここに J が ω_0 と両立す

るとは任意の $X,\ Y \in T_pM$ に対し

$$\omega_0(JX, JY) = \omega_0(X, Y), \quad \omega_0(X, JX) > 0$$

をみたすときをいう．従って $J \in Z$ に対し (M, ω_0, J) は Kähler 多様体となる．このとき J における Z の接空間は $(0,2)$ 型対称テンソル全体 $Sym^2(T^{*0,1}M)$ の部分空間になり，自然な L^2-内積が Z の Kähler 構造を与える．測度 $\omega_0^m/m!$ を用いた積分による平均が 0 となる M 上の滑らかな関数全体は ω_0 を用いた Poisson 括弧積に関し Lie 環になる．この Lie 環を $\mathfrak{k}$ とし，その Lie 群を K とする．すなわち，K は Hamilton 微分同相で生成されるシンプレクティック微分同相群の部分群である．K は Kähler 多様体 Z に正則かつ等長的に作用する．

定理 2.5 ([**28**], [**21**]) S_J を Kähler 多様体 (M, ω_0, J) のスカラー曲率とし，写像 $\mu : Z \to \mathfrak{k}^*$ を

$$< \mu(J), u >= \int_M S_J\, u\, \omega_0^m$$

により与えられるものとする（ただし $u \in \mathfrak{k}$ とする）．このとき μ は K の作用に関するモーメント写像となる．

この場合 K の複素化 K^c による Z への自然な作用は存在しない．しかし，Lie 環レベルでは複素化 $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ による自然な作用は存在する．これは Z に葉層構造を与え，各々の葉は $[\omega] = [\omega_0]$ となる (ω, J_0) に Moser の定理で対応する (ω_0, J) 全体からなっていると考えることができ，この意味で葉は固定した J_0 に関する Kähler 形式全体とみなすことができる．この違いに目をつむり，命題 2.2, 2.3, 2.4 を Z に形式的に適用すると Kähler 幾何でよく知られている以下の結果が得られることを示唆する．

少々脱線するがその前に次のことを注意しておこう．定理 2.5 は，J が汎関数

$$J \mapsto \int_M |S_J|^2 \omega_0^m$$

の臨界点であるための必要十分条件は (M, J, ω_0) が extremal Kähler 多様体であることであることを意味する．

まず，命題 2.2 が示唆するのは次の結果である．命題 2.2 に出て来た関数 ℓ は満渕 energy と呼ばれる同じ Kähler 類に属する Kähler 計量全体の空間上の汎関数に相当する．

定理 2.6 ([**17**]) M をコンパクト Kähler 多様体，$[\omega_0]$ を固定した Kähler 類とする．このとき $[\omega_0]$ に属する定スカラー曲率 Kähler 計量の全体のなす空間の連結成分は高々一つである．またこの連結成分が一つのとき，満渕 energy はこの空間上で最小値をとる．特に，$[\omega_0]$ に属する定スカラー曲率 Kähler 計量 が存在すれば満渕 energy は下から有界である．

次に命題 2.3 が何を示唆するか見よう．まず，点 $x \in Z$ は ω_0 と両立する複素構造であるので，その固定部分群 K_x は Hamilton 微分同相として表される正則自己同型全体である．ここで $\omega \in [\omega_0]$ を任意に取る．式 (2) によれば正則ベクトル場 X は $X = \sqrt{-1}\mathrm{grad}^{1,0}u_X$ と表されている．ここに $\mathrm{grad}^{1,0}u_X$ は 勾配ベクトル場の $(1,0)$-部分

$$\mathrm{grad}^{1,0}u_X=\sum_{i,j=1}^{m}g^{i\bar{j}}\frac{\partial u_X}{\partial z^{\bar{j}}}\frac{\partial}{\partial z^i}$$

を表す．このとき命題 2.3 から Lie 環準同型

$$f(X):=-\sqrt{-1}\langle\mu(J),u_X\rangle=-\sqrt{-1}\int_M u_X S_J\omega^m=\int_M XF\ \omega^m \tag{4}$$

が得られる．ここに $F\in C^\infty(M)$ は

$$\Delta F=S_J-\frac{\int_M S_J\omega^m}{\int_M\omega^m}$$

をみたす滑らかな関数である．

定理 2.7 ([29], [15])　M をコンパクト Kähler 多様体，$[\omega_0]$ を固定した Kähler 類とする．このとき (4) により与えられる Lie 環準同型 f は Kähler 形式 $\omega\in[\omega_0]$ の取り方によらない．また，Kähler 類 $[\omega_0]$ にスカラー曲率一定の Kähler 計量が存在するなら $f=0$ となる．

また命題 2.4 は次の結果を示唆する．

定理 2.8 ([15])　M をコンパクト extremal Kähler 多様体とすると，Lie 環の分解

$$\mathfrak{h}(M)=\mathfrak{h}_0\oplus\sum_{\lambda>0}\mathfrak{h}_\lambda$$

が得られる．ここに $\mathfrak{h}_\lambda$ は $\mathrm{ad}(\sqrt{-1}\mathrm{grad}^{1,0}S)$ の λ-固有空間であり，$\sqrt{-1}\mathrm{grad}^{1,0}S$ は $\mathfrak{h}_0$ の中心に属する．また，$\mathfrak{h}_0$ は簡約可能である．

この定理により, 特に M がスカラー曲率一定 Kähler 計量を持つならば $\mathfrak{h}(M)=\mathfrak{h}_0$ となり, $\mathfrak{h}(M)$ は簡約可能であることがわかる．この結果は Lichnerowicz-Matsushima の定理と呼ばれ，スカラー曲率一定 Kähler 計量が存在するための良く知られた障害である．

次に摂動スカラー曲率の場合を考察し，シンプレクティック幾何としては非摂動スカラー曲率の場合と同様の結果が得られ， Kähler 幾何としては同様でないことを見る．以下記号の簡略化のために，ω_0 の代わりに ω を固定したシンプレクティック形式とする．絶対値が十分小さい実数 t と ω と両立する $J\in Z$ の組 (J,t) に対し，M 上の滑らかな関数 $S(J,t)$ を

$$S(J,t)\,\omega^m=c_1(J)\wedge\omega^{m-1}+tc_2(J)\wedge\omega^{m-2}+\cdots+t^{m-1}c_m(J) \tag{5}$$

により定義する．ここに $c_i(J)$ は (J,ω_0) に関する i 次 Chern 形式で，(J,ω) に関する Levi-Civita 接続の曲率形式を Θ とするとき

$$\det(I+\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}t\Theta)=1+tc_1(J)+\cdots+t^m c_m(J), \tag{6}$$

により定義されるものである．Kähler 多様体 (M,J,ω) の Kähler 計量 g が ***t*-摂動 extremal Kähler 計量**，または単に摂動 extremal 計量とは

$$\mathrm{grad}^{1,0}S(J,t)=\sum_{i,j=1}^{m}g^{i\bar{j}}\frac{\partial S(J,t)}{\partial\bar{z}^j}\frac{\partial}{\partial z^i} \tag{7}$$

が正則ベクトル場であるときをいう．

命題 2.9 ([33]) Z 上の汎関数 Φ を

$$\Phi(J) = \int_M S(J,t)^2 \omega^m \tag{8}$$

により定義するとき，Φ の臨界点は摂動 extremal Kähler 計量である．

命題 2.9 の証明は非摂動スカラー曲率の場合と同様, 摂動スカラー曲率がモーメント写像であることから従う (下の定理 2.10)．摂動スカラー曲率がモーメント写像であるという意味は次の様にして与えられる Z の摂動シンプレクティック構造に関してである．Z の点 J における接空間は $\mathrm{Sym}(\otimes^2 T^{*0,1}M)$ の部分空間と同一視されるのであった．実数 t が十分小さいとき，$\mathrm{Sym}(\otimes^2 T^{*0,1}M)$ の Hermite 構造を

$$(\nu,\mu)_t = \int_M mc_m(\overline{\nu}_{jk}\,\mu^i{}_{\bar\ell}\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\,dz^k\wedge d\overline{z^\ell}, \omega\otimes I + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\,t\Theta, \cdots,\ \omega\otimes I + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\,t\Theta) \tag{9}$$

により定義する．ここに μ と ν は接空間 $T_J Z$ の元であり，c_m は $GL(m,\mathbb{C})$-不変多項式としての行列式の polarization と見なしている．つまり，$c_m(A_1,\cdots,A_m)$ は $\det(t_1A_1+\cdots+t_mA_m)$ における $m!\,t_1\cdots t_m$ の係数である．さらに I は単位行列，$\Theta = \overline{\partial}(g^{-1}\partial g)$ は Levi-Civita 接続の曲率形式，$u_{jk}\mu^i_l$ は $\partial/\partial z^j$ を $u_{jk}\mu^i_l\partial/\partial z^i$ に送る $T^{1,0}_J M$ の 1 次変換とみなしている．$t=0$ のとき (9) は通常の L^2-内積になっている．$J\in Z$ における摂動シンプレクティック形式 $\Omega_{J,t}$ は

$$\begin{aligned}\Omega_{J,t}(\nu,\mu) &= \Re(\nu,\sqrt{-1}\mu)_t \\ &= \Re\int_M mc_m(\overline{\nu}_{jk}\,\sqrt{-1}\mu^i{}_{\bar\ell}\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\,dz^k\wedge d\overline{z^\ell}, \omega\otimes I + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\,t\Theta, \\ &\qquad\qquad \cdots,\ \omega\otimes I + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\,t\Theta)\end{aligned} \tag{10}$$

によって与えられる．ただし $\Re$ は実部を表す．

定理 2.10 ([33]) $\delta J = \mu$ とするとき

$$\delta\int_M u\ S(J,t)\omega^m = \Omega_{J,t}(2\sqrt{-1}\nabla''\nabla'' u,\mu) \tag{11}$$

が成り立つ．すなわち摂動スカラー曲率 $S(J,t)$ は摂動シンプレクティック形式 $\Omega_{J,t}$ と Hamilton 微分同相群の作用に関しモーメント写像になる．

ここで J を固定し，$\omega\in[\omega_0]$ に対し式 (5) で摂動スカラー曲率を定義したものを $S(\omega,t)$ により表す．$[\omega_0]$ 上の汎関数

$$\omega \mapsto \int_M |S(\omega,t)|^2\omega^m$$

の臨界点は摂動 extremal Kähler 計量ではないようである（[33] の Remark 3.3 参照）．さて，この摂動版でも命題 2.3, 2.4 に対応する結果が得られる．命題 2.3 に対応して，板東による高次 Chern 形式が調和形式で代表されるための障害 ([3]) が得られる（[34] および本稿第 3 節参照）．命題 2.4 は摂動 extremal Kähler 多様体に対しても定理 2.8 と全く同じ分解定理が成立することを示唆するが，L.-J. Wang （[59]) の議論を使うと厳密な証明も与えることがわかる（[34]）．しかし，命題 2.2 が示唆する一意性をこの場合に厳密に証明するのは容易ではないと思われる．

3　漸近的 Chow 半安定性と積分不変量

前節では GIT 安定性のモーメント写像を用いた描像でスカラー曲率一定 Kähler 計量を持つ多様体がどう捉えられるかを見た．また，定スカラー曲率 Kähler 計量が存在するための障害を与えるものとして良く知られている (4) により与えられる Lie 環準同型 f や Lichinerowicz-Matsushaima の定理がこの描像の中にどう現れるかも見た．本節では，Lie 環準同型 f が，代数幾何的な安定性の一つである漸近的 Chow 半安定性の障害となることをみる．この事実は定スカラー曲率 Kähler 計量の存在問題が実際に安定性と関わることを表す．本節は論文 [31] に基づく．

$P_G \to M$ をコンパクト Kähler 多様体上の正則主 G 束とする．ただし，G は複素 Lie 群で右から構造群として作用するものとする． さらに，ある複素 Lie 群 H が左から P_G に正則に作用し，構造群 G の右作用とは可換であるとする．従ってこの場合，H は M にも自己同型として作用する．

主 G 束 P_G は接続形式が P_G 上の $(1,0)$ 形式であるようなものを持つとする．そのような接続を $(1,0)$-型接続と呼ぶことにする．そのような接続の典型的なものは Hermite 正則ベクトル束の正則枠束の接続である．Hermite 正則ベクトル束には Hermite 計量と両立し，共変微分の $(0,1)$-部分が $\overline{\partial}$-作用素 に等しいようなものが一意的に存在する．従ってこの場合，接続形式は $(1,0)$-型である．

θ をそのような $(1,0)$-型接続形式とし，Θ を曲率形式とする．H の Lie 環 $\mathfrak{h}$ の元 X は P_G 上の G-不変ベクトル場を定める．記号を混用してそのようなベクトル場も X により表すことにする．$\mathfrak{g}$ 上の次数 p の G-不変多項式の全体を $I^p(G)$ により表す．$p \geq m$ とし，任意の $\phi \in I^p(G)$ に対し f_ϕ を

$$f_\phi(X) = \int_M \phi(\theta(X) + \Theta)$$

により定義する．このとき f_ϕ は $(1,0)$-型接続 θ の取り方に依存しないことがわかる．このことから f_ϕ は $I^{p-m}(H)$ の元を与えることがわかる．f_ϕ は同変コホモロジーの一種の表現の仕方を与える．

特別な場合として $G = GL(m,\mathbb{C})$ で P_G がコンパクト Kähler 多様体 M の正則接束の枠束の場合を考えよう．H としては M の自己同型群の部分群を取る．H は自然に P_G に作用する．この場合 $I^*(G)$ は固有値の基本対称式たちで生成される代数である．

$\phi \in I^k(G)$ に対し，

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\phi(X) = (m-k+1)&\int_M \phi(\Theta)\wedge u_X\,\omega^{m-k}\\ &+ \int_M \phi(\theta(X)+\Theta)\wedge\omega^{m-k+1} \end{aligned} \tag{12}$$

とおく．

定理 3.1 ([31])　$\mathcal{F}_\phi(X)$ は M の Kähler 形式 $\omega \in [\omega_0]$ の選び方にも，P_G の $(1,0)$-型接続形式 θ の選び方にもよらない．

この積分不変量の族は，Lie 環準同型 f の拡張として板東 [3] によって得られた高次 Chern 類が調和形式で代表できるための障害を部分族として含む．以下このことを説明する．M をコンパクト Kähler 多様体とし，$[\omega_0]$ を任意の Kähler 類とする．任意の Kähler 形式 $\omega \in [\omega_0]$ に対し，$c_k(\omega)$ をその k 次 Chern 形式とし，更に $Hc_k(\omega)$ を $c_k(\omega)$ の調和部分とする．このとき $(k-1,k-1)$ 次

形式 F_k で

$$c_k(\omega) - Hc_k(\omega) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\overline{\partial}F_k$$

をみたすものが存在する．そこで $f_k : \mathfrak{h}(M) \to \mathbb{C}$ を

$$f_k(X) = \int_M L_X F_k \wedge \omega^{m-k+1}$$

により定義する．すると f_k は $\omega \in [\omega_0]$ の選び方によらず，従って Lie 環準同型になることがわかる．もしある $\omega \in [\omega_0]$ に関し $c_k(\omega)$ が調和形式になるならばその ω に関し $F_k = 0$ となるので，その場合 $f_k = 0$ となる．すなわち，f_k は Kähler 類 $[\omega_0]$ の中に k 次 Chern 形式が調和形式になるような Kähler 形式が存在するための障害となる．

$k = 1$ の場合，第 1 Chern 形式が調和であることとスカラー曲率が一定であることとは同値である．このことは Biachi の恒等式から容易にわかる．従って f_1 は Kähler 類 $[\omega_0]$ の中にスカラー曲率一定 Kähler 計量が存在のための障害である．実際，f_1 は前節において式 (4) で定義した f と同一である．

P_G が M の正則接束の枠束で，θ が Kähler 形式 ω に関する Levi-Civita 接続の場合，

$$\mathcal{F}_{c_k}(X) = (m-k+1)f_k(X)$$

となることを見よう．まず，以下に説明するように (12) の第 2 項は $\phi = c_k$ に対しては 0 になる．次に，$Hc_k(\omega) \wedge \omega^{m-k}$ は調和形式であり，調和形式の一意性からこれは　体積要素 $\omega^m/m!$ の定数倍になる．　すると正規化条件 (3) から (12) の $f_k(X)$ と一致することがわかる．

$\phi = c_k$ に対しては (12) の第 2 項は 0 になるということは次のようにして証明される．$\theta(X)$ は $L(X) = L_X - \nabla_X$ と共役であるが，Kähler の場合後者は $\nabla X = \nabla \mathrm{grad}^{1,0} u$ に等しい．また，

$$\begin{aligned}&\int_M c_p(\theta(X), \overbrace{\Theta, \cdots, \Theta}^{p-1}) \wedge \omega^{m-p+1} \\ &= \int_M c_m(\overbrace{\omega \otimes I, \cdots, \omega \otimes I}^{m-p}, \omega \otimes L(X), \overbrace{\Theta, \cdots, \Theta}^{p-1})\end{aligned}$$

の計算においてはファイバー成分についても底空間の成分についても行列式をとる．よってこの対称性より

$$\begin{aligned}\text{右辺} &= \int_M c_m(\omega \otimes I, \cdots, \omega \otimes I, i\partial\overline{\partial}u \otimes I, \Theta, \cdots, \Theta) \\ &= -\int_M \overline{\partial}c_m(\omega \otimes I, \cdots, \omega \otimes I, i\partial u \otimes I, \Theta, \cdots, \Theta) \\ &= 0\end{aligned}$$

となる．

次に $1 \leq \ell \leq m$ に対し，$\mathcal{F}_{Td^\ell}$ は漸近的 Chow 半安定性の障害となることを見よう．ただし，Td^ℓ は ℓ 次 Todd 多項式である．幾何学的不変式論によれば Hausdorff 性や概代数性などの良い性質を持つモデュライ空間を構成するには半安定なものだけを集めなければならない　([51])．V をベクト

ル空間とし，G を $SL(V)$ の部分群とする．$x \in V$ が**安定**であるとは軌道 Gx が閉集合であり，x における固定部分群が有限群であるときをいう．$x \in V$ が**半安定**であるとは軌道 Gx の閉包が原点 $\mathbf{o}$ を含まないときをいう．

$L \to M$ を豊富な直線束とし，$V_k := H^0(M, L^k)^*$ とおく．$\Phi_{|L^k|} : M \to \mathbb{P}(V_k)$ を L^k による小平埋め込みとし，その次数を d とする．$m+1$ 個の $\mathbb{P}(V_k^*)$ の直積 $\mathbb{P}(V_k^*) \times \cdots \times \mathbb{P}(V_k^*)$ は $m+1$ 個の $\mathbb{P}(V_k)$ の超平面 $H_1, \cdots, H_{m+1}$ を定める．$H_1 \cap \cdots \cap H_{m+1} \cap M$ が空でないような $m+1$ 個の超平面 $H_1, \cdots, H_{m+1}$ の組全体は $\mathbb{P}(V_k^*) \times \cdots \times \mathbb{P}(V_k^*)$ の因子を定める．しかし M の次数は d であるからこの因子は $\hat{M}_k \in (Sym^d(V_k))^{\otimes m+1}$ により与えられる． もちろん $\hat{M}_k$ は定数倍を除いて一意的に決まる．点 $[\hat{M}_k] \in \mathbb{P}((Sym^d(V_k))^{\otimes m+1})$ を (M, L^k) の **Chow 点** と呼ぶ．$(Sym^d(V_k))^{\otimes m+1}$ への $SL(V_k)$ の作用に関し $\hat{M}_k$ が安定のとき，M は L^k に関し **Chow 安定である**という．ある $k_0 > 0$ が存在して，任意の $k \geq k_0$ に対し，$\hat{M}_k$ が安定であるとき，偏極多様体 (M, L) は**漸近的に Chow 安定**であるという，漸近的に Chow 半安定であることも同様に定義される．

定理 3.2 ([31])　もし偏極多様体 (M, L) が漸近的に Chow 半安定ならば，$1 \leq \ell \leq m$ に対し

$$\mathcal{F}_{Td^{(\ell)}}(X) = 0 \tag{13}$$

が成立する．特に $\ell = 1$ の場合は $f_1 = 0$ を意味する．

漸近的安定性と定スカラー曲率 Kähler 計量の存在については，Donaldson（[22]） の次のような結果も知られている．$\mathrm{Aut}(M, L)$ は離散群であるとする．$\mathbb{P}(V_k)$ の Fubini-Study 計量の Kähler 形式を ω_{FS} により表す．このとき

(a) (M, L) が漸近的に Chow 安定であるとする．もし $c_1(L)$ に属する Kähler 形式の列 $\omega_k := (2\pi)/k\ \Phi_{|L^k|}^*(\omega_{FS})$ が C^∞ で ω_∞ に収束するならば，ω_∞ は定スカラー曲率を持つ．

(b) もし $\omega_\infty \in 2\pi c_1(L)$ が定スカラー曲率を持つならば，(M, L) は漸近的に Chow 安定で，ω_k は C^∞ で ω_∞ に収束する．

(c) $2\pi c_1(L)$ に属する定スカラー曲率 Kähler 計量は一意的である．

$\mathrm{Aut}(M, L)$ が離散的でない場合も満渕によって調べられている（[47] 参照）．

4　K 安定性

論文 [56] において Tian は，Fano 多様体に対し K 安定性の概念を導入し，もし Fano 多様体が Kähler-Einstein 計量を持つならば M は “弱 K 安定” であることを証明した．Tian の K 安定性は M の特異正規多様体への退化を考え，安定性を量る指数として f の定義を特異正規多様体にまで拡張した不変量（[20]）を用いるものであった．[23] において Donaldson は不変量 f を一般の射影スキームに代数的に定義し直し，(M, L) に対する K 安定性の概念も定義し直した．以下，Donaldson による K 安定性の定義を紹介する．

$\Lambda \to N$ を n 次元射影スキーム上の豊富な直線束とする．Λ には束同型としての $\mathbb{C}^*$-作用があり，この作用は N への $\mathbb{C}^*$-作用を誘導するものとする．このとき任意の正の整数 k に対し，$W_k = H^0(N, \Lambda^k)$ への $\mathbb{C}^*$-作用が誘導される．$d_k = \dim W_k$ とおき，w_k を $\wedge^{d_k} W_k$ への $\mathbb{C}^*$-作用のウェイトとする．Riemann-Roch および同変 Riemann-Roch の定理により d_k と w_k はそれぞれ次数 n

および $n+1$ の k を変数とする多項式になる．従って，w_k/kd_k は k が無限大に近づくとき有界であり，十分大きい k に対し

$$\frac{w_k}{kd_k} = F_0 + F_1 k^{-1} + F_2 k^{-2} + \cdots$$

と展開することができる．

射影多様体 M とその上の豊富な直線束 L に対し，指数 r のテスト配位とは次のものからなる．

(1) スキームの族 $\pi : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$:

(2) $\mathcal{M}$ への $\mathbb{C}^*$-作用で $\mathbb{C}$ への通常の $\mathbb{C}^*$-作用を覆うもの:

(3) $\mathbb{C}^*$-同変直線束 $\mathcal{L} \to \mathcal{M}$ で次をみたすもの：

- $t \neq 0$ に対し $M_t = \pi^{-1}(t) \cong M$ かつ $(M_t, \mathcal{L}|_{M_t}) \cong (M.L^r)$,
- Hilbert 多項式 $\sum_{p=0}^{n}(-1)^p \dim H^p(M_t, L_t^r)$ は t によらない．従って特に，十分大きい r に対し $\dim H^0(M_t, L_t) = \dim H^0(M, L)$ がすべての $t \in \mathbb{C}$ に対し成立する．

この定義のもとに $\mathbb{C}^*$-作用は中心ファイバー $L_0 \to M_0 = \pi^{-1}(0)$ への $\mathbb{C}^*$-作用を誘導する．また，もし (M, L) が $\mathbb{C}^*$-作用を持てば，直積 $L \times \mathbb{C} \to M \times \mathbb{C}$ が自然にテスト配位を与える．これを**直積配位**という．直積配位において $\mathbb{C}^*$ が M に自明に作用するとき，この配位は自明な配位であるという．

定義 4.1 (M, L) が **K 半安定**（または **K 安定**）であるとは，任意の自明でないテスト配位に対し中心ファイバー (M_0, L_0) の F_1 が非正（または負）であるときをいう．(M, L) が **K polystable** であるとは，(M, L) は K 半安定であり，更に等号が成立するのはテスト配位が直積配位であるときに限るときをいう．

予想 (Donaldson [23], Tian [56])：(M, L) を偏極多様体とする．Kähler 類 $c_1(L)$ に定スカラー Kähler 計量が存在するための必要十分条件は (M, L) が K polystable であることであろう．

次の補題は中心ファイバーが非特異の場合は F_1 は定数倍を除いて $-f(X)$ と一致することを示す．ここに X は $\mathbb{C}^*$-作用の無限小生成元である．このことと，Tian [56] による満渕 energy の振る舞いに関する解析が上の予想の根拠になっている．

補題 4.2 ([23]) F_1 の定義において，もし N が非特異射影多様体であるならば

$$F_1 = \frac{-1}{2vol(N, \omega)} f(X)$$

が成立する．ただし X は $\mathbb{C}^*$-作用の無限小生成元で，f は (4) で定義した Lie 環準同型である．

証明 n を N の複素次元とする．$d_k = h^0(\Lambda^k)$ と $w(k)$ を次のように展開する．

$$d_k = a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \cdots,$$

$$w(k) = b_0 k^{n+1} + b_1 k^n + \cdots.$$

すると Riemann-Roch の公式および同変 Riemann-Roch の公式により

$$a_0 = \frac{1}{n!}\int_N c_1(\Lambda)^n = vol(N),$$

$$a_1 = \frac{1}{2(n-1)!}\int_N \rho \wedge c_1(\Lambda)^{n-1} = \frac{1}{2n!}\int_N S\omega^n,$$

$$b_0 = \frac{1}{(n+1)!}\int_N (n+1)u_X\omega^n,$$

$$b_1 = \frac{1}{n!}\int_N nu_X\omega^{n-1} \wedge \frac{1}{2}c_1(N) + \frac{1}{n!}\int_N \operatorname{div} X\ \omega^n$$

を得る．最後の式の右辺第 2 項は発散定理により 0 である．よって

$$\frac{w(k)}{kd_k} = \frac{b_0}{a_0}(1 + (\frac{b_1}{b_0} - \frac{a_1}{a_0})k^{-1} + \cdots)$$

となり，これより

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{b_0}{a_0}(\frac{b_1}{b_0} - \frac{a_1}{a_0}) = \frac{1}{a_0^2}(a_0b_1 - a_1b_0) \\ &= \frac{1}{2vol(N)}\int_N u_X\left(S - \frac{1}{vol(N)}\int_N S\ \frac{\omega^n}{n!}\right)\frac{\omega^n}{n!} \\ &= \frac{1}{2vol(N)}\int_N u_X\Delta F\frac{\omega^n}{n!}\ =\ \frac{-1}{2vol(N)}\int_N XF\frac{\omega^n}{n!} \\ &= \frac{-1}{2vol(N)}f_1(X) \end{aligned}$$

を得る．

5　佐々木-Einstein 計量の存在と一意性

佐々木多様体は佐々木-畠山 [54] において導入され, 特に日本の幾何学者達を中心に研究されてきた「Kähler 多様体の奇数次元類似」とも言える対象である．しかし, 数年前までは, その類似性故に, Kähler 幾何と比べて注目を集めることは少なかった1)．特に, 佐々木-Einstein 多様体は正の Kähler-Einstein 軌道体（orbifold）上の S^1-軌道束（orbibundle）として得られるもの以外には存在しないと予想されていたので, 佐々木-Einstein 計量の存在問題は, まさに（軌道体上の）Kähler-Einstein 計量の存在問題に帰着されると考えられていた．ところが, 1990 年代後半に入り弦理論の AdS/CFT 対応において佐々木-Einstein 多様体が重要な役割を果たすことが指摘され, Gauntlett-Martelli-Sparks-Waldram [37] により正の Kähler-Einstein 軌道体上の S^1-軌道束としては得られない無限個の佐々木-Einstein 計量が構成され状況は一変した．つまり, 佐々木-Einstein 多様体全体の集合は正の Kähler-Einstein 多様体（軌道体2)）全体の集合を真に含むことがわかったのである．そこで, 第 5.1 節から第 5.6 節で, この事実をトーリック佐々木多様体の場合に, 筆者達と Guofang Wang, 趙康治との共著 [36], [19] をもとに解説する．また, 第 5.7 節ではトーリックとは限らない佐々木多様体において, Gauntlett-Martelli-Sparks-Yau [38] により与えられた佐々木-Einstein 計量の存在の障害（これも, Kähler 幾何的に得られるものではない）を紹介する．

5.1 佐々木多様体

まず, 佐々木多様体を次のように定義する；Riemann 多様体 (S,g) に対してその Riemann 錐 $(\mathbb{R}_+\times S, dr^2+r^2g)$ を $(C(S),\bar{g})$ と書くことにする．

定義 5.1 Riemann 錐 $(C(S),\bar{g})$ が Kähler 多様体となるとき, Riemann 多様体 (S,g) は**佐々木多様体**であるという．したがって佐々木多様体は奇数次元である．また, $(\{r=1\}\subset C(S),\bar{g}_{|\{r=1\}})$ は (S,g) と等長的である．

佐々木多様体 (S,g) が与えられると, それに付随して, 幾つかの重要な対象が存在する；
J を $(C(S),\bar{g},J)$ が Kähler 多様体となるような複素構造とする．$C(S)$ 上のベクトル場 $\tilde{\xi}$ 及び 1-形式 $\tilde{\eta}$ を

$$\tilde{\xi}=Jr\frac{\partial}{\partial r},\quad \tilde{\eta}=\frac{1}{r^2}\bar{g}(\tilde{\xi},\cdot)=\sqrt{-1}(\bar{\partial}-\partial)\log r$$

により定義し, それぞれ（$C(S)$ 上の）**Reeb ベクトル場**, **接触形式**と呼ぶ．これらを $\{r=1\}\simeq S$ に制限したもの $\xi=\tilde{\xi}_{|S}$, $\eta=\tilde{\eta}_{|S}$ は S 上のベクトル場および 1-形式を与え, これらも Reeb ベクトル場, 接触形式と呼ぶ[3)]．Reeb ベクトル場 $\tilde{\xi}$ は $(C(S),\bar{g})$ 上の Killing ベクトル場であり, $\tilde{\xi}-\sqrt{-1}J\tilde{\xi}$ は $(C(S),J)$ 上正則である．また, $\bar{g}(\tilde{\xi},\tilde{\xi})=r^2$ となることも直ちにわかる．

さらに, Kähler 多様体 $(C(S),J,\bar{g})$ の Kähler 形式 ω は

$$\omega=\frac{1}{2}d(r^2\tilde{\eta})=\frac{\sqrt{-1}}{2}\partial\bar{\partial}r^2$$

である．

例 5.2 最も基本的な例は奇数次元単位球面 $S^{2m+1}(1)$ である．この場合, Riemann 錐は複素ユークリッド空間から原点をぬいた $(\mathbb{C}^{m+1}\setminus\{0\},\langle\ ,\ \rangle)$ であり, Reeb ベクトル場は

$$\tilde{\xi}_0=\sum_{j=0}^{m}(x^j\frac{\partial}{\partial y^j}-y^j\frac{\partial}{\partial x^j})=\sqrt{-1}\sum_{j=0}^{m}(z^j\frac{\partial}{\partial z^j}-\bar{z}^j\frac{\partial}{\partial\bar{z}^j})$$

で与えられる．

さて, 佐々木多様体は, その定義より, 実 1 次元高い Kähler 多様体（Riemann 錐）と密接な関係があることは明らかであるが, Reeb ベクトル場 ξ が定める葉層と横断的な方向に実 1 次元低い Kähler 構造が入る事も重要である；佐々木多様体 (S,g) の S 上の Reeb ベクトル場 ξ は $g(\xi,\xi)=1$ を満たし, S 上の葉層構造 $\mathcal{F}_\xi$ を定める．これを S の Reeb 葉層と呼ぶ．$\tilde{\xi}-\sqrt{-1}J\tilde{\xi}$ は $C(S)$ 上の正則ベクトル場であるので, $\tilde{\xi}-\sqrt{-1}J\tilde{\xi}$ により $C(S)$ 上に正則な flow が生成される．その局所軌道は Reeb 葉層 $\mathcal{F}_\xi$ に横断的正則構造（Φ と表す）を定義する：S の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ と沈めこみ $\pi_\alpha:U_\alpha\to V_\alpha\subset\mathbb{C}^m$ が存在し, $U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$ の場合

$$\pi_\alpha\circ\pi_\beta^{-1}:\pi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)\to\pi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)$$

が双正則となる．さらに, 各 V_α 上には次のように Kähler 構造を与えることが出来る．$D=\mathrm{Ker}\ \eta\subset TS$ とする．各 $p\in U_\alpha$ に対して $d\pi_\alpha:D_p\to T_{\pi_\alpha(p)}V_\alpha$ は同型である．Reeb ベクトル場 ξ は佐々木多様体 (S,g) の Killing ベクトル場であるので, 佐々木計量の制限 $g_{|D}$ は V_α 上の well-defined な Hermite 計量 g_α^T を与える．これは Kähler 計量であり（基本 2 次形式 ω_α^T は $d\eta/2_{|U_\alpha}$ に対応する）,

$\pi_\alpha \circ \pi_\beta^{-1} : \pi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \pi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ が Kähler 多様体として等長的であることがわかる．したがって, Reeb 葉層 $\mathcal{F}_\xi$ は S 上の Kähler 葉層である.

以下, 佐々木多様体は Reeb ベクトル場, 接触形式及び横断的正則構造も明記した方が良いと思われるときには $(S, g; \xi, \eta, \Phi)$ のように表すことにする.

例 5.3　例 5.2 の奇数次元単位球面の場合, Reeb ベクトル場 ξ_0 は S^1 作用 $(z^0, \cdots, z^m) \mapsto (e^{i\theta}z^0, \cdots, e^{i\theta}z^m)$ を生成するので,「横断的 Kähler 構造」は S^1 作用の軌道空間 $(\mathbb{C}P^m, g_{FS})$, g_{FS} は Fubini-Study 計量, である．このように, Reeb ベクトル場が（局所）自由な S^1 作用を生成する佐々木多様体を **(quasi-)regular** であるという．(quasi-)regular な佐々木多様体の横断的 Kähler 構造は S^1 作用の商として得られる Kähler 多様体（軌道体）であり, 逆に Kähler 多様体（軌道体[4)]）(M, ω) で Kähler 類 $[\omega]$ が整数係数コホモロジー類となるものに対して, $c_1(L) = [\omega]$ を満たす複素（軌道）直線束 L に随伴する $U(1)$ 束 $S(L)$ 上には (M, ω) を横断的 Kähler 構造とする (quasi-)regular な佐々木計量を構成することが出来る．詳しくは [7], [9] 等を参照.

一方, Reeb ベクトル場が閉じていない積分曲線を持つとき, 佐々木多様体は **irregular** であるという．この場合には横断的 Kähler 構造は Kähler 多様体として実現できるわけではない.

最後に, 佐々木多様体 (S, g) がさらに Einstein 多様体である場合に, Riemann 錐計量 $\bar{g}$, 横断的 Kähler 計量 g^T が満たすべき条件をまとめておく.

命題 5.4　$(2m+1)$-次元佐々木多様体 (S, g) に対して次の 3 条件は同値である：

1. g は Einstein 計量である．このとき $Ric = 2mg$, Ric は g の Ricci 曲率, となる.
2. Riemann 錐 $(C(S), \bar{g})$ は Ricci 平坦 Kähler 多様体である.
3. 横断的 Kähler 計量 g^T の Ricci 曲率を Ric^T と書くことにすると $Ric^T = (2m+2)g^T$ となる.

この命題の証明は [9] を見よ（1 と 2 の同値性は Lemma 11.1.5 に, 1 と 3 の同値性は Theorem 7.3.12 にある）.

例 5.5　quasi-regular 佐々木-Einstein 多様体は, 例 5.3 の対応により, locally cyclic な正の Kähler-Einstein 軌道体と 1:1 に対応している．（これらの例は Boyer, Galicki を中心とした研究により非常に多く得られており, 彼等の本 [9] にまとめられている．）

5.2　積分不変量

第 2 節において, スカラー曲率一定 Kähler 計量が存在するための障害として, 式 (4) により与えられる積分不変量 f が存在することを見た．特に Kähler 類 $[\omega]$ が多様体の第 1 Chern 類 $c_1(M)$ と等しい場合には, f は Kähler-Einstein 計量が存在するための一つの障害を与えるのであった．一方, 前小節の命題 5.4 より, 佐々木-Einstein 多様体とは横断的 Kähler 計量が正の Kähler-Einstein 計量である事と同義である．そこで, この小節では, 佐々木-Einstein 計量が存在するための障害として, 横断的 Kähler 構造に関する積分不変量を構成する.

佐々木多様体が佐々木-Einstein 計量を持つには,「佐々木多様体が横断的に正の第 1 Chern 類を持つ」事が必要なのであるが, 通常の Kähler 幾何の場合と異なり, 実はそれだけでは不十分である．まず最初に, このことについて見ておく必要がある.

以下 $(S, g; \xi, \eta, \Phi)$ をコンパクト佐々木多様体とする.

定義 5.6　S 上の p-形式 α が

$$i(\xi)\alpha = 0, \quad L_\xi \alpha = 0$$

を満たすとき **basic** p**-形式**と呼ぶ．ここで, ξ は S 上の Reeb ベクトル場, i は内部積, L_ξ は ξ 方向の Lie 微分を表す．また, 前小節で見た S の横断的正則構造 $(\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}, \pi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha)$ を考慮に入れると, 局所的に V_α 上の (p,q)-形式 の引き戻しとして表せるような basic 形式として, S 上の basic (p,q)-形式を well-defined に定義することが出来る．basic p-形式の層（basic (p,q)-形式の層）を Λ_B^p ($\Lambda_B^{p,q}$) , basic p-形式 （basic (p,q)-形式）全体の集合を $\Omega_B^p = \Gamma(S, \Lambda_B^p)$ ($\Omega_B^{p,q} = \Gamma(S, \Lambda_B^{p,q})$) と書くことにする．

basic 形式 α に対して外微分 $d\alpha$ も basic 形式である．そこで $d_B = d_{|\Omega_B^*}$ とおくと, basic de Rham 複体 (Ω_B^*, d_B) が得られる．また, 作用素

$$\partial_B : \Omega_B^{p,q} \to \Omega_B^{p+1,q}, \quad \bar\partial_B : \Omega_B^{p,q} \to \Omega_B^{p,q+1}$$

を定義することが出来, $d_B = \partial_B + \bar\partial_B$ となる．$\bar\partial_B^2 = 0$ であり, basic Dolbeault 複体 $(\Omega_B^{p,*}, \bar\partial_B)$ を得る．

例 5.7　まず, 前小節で見たように, 佐々木多様体 $(S, g; \xi, \eta, \Phi)$ の横断的 Kähler 形式 $\{\omega_\alpha^T\}_{\alpha\in A}$ は $\pi_\alpha^*\omega_\alpha^T = d\eta/2_{|U_\alpha}$ を満たすので, S 上でうまく張り合い d_B-閉 basic $(1,1)$-形式 $d\eta/2$ を与える．そこで, $\omega^T = d\eta/2$ と書き, これの事も横断的 Käher 形式と呼ぶことにする．一方, (S, g) の横断的 Ricci 形式 $\{\rho_\alpha^T\}_{\alpha\in A}$, $\rho_\alpha^T = -\sqrt{-1}\partial\bar\partial \log\det(g_\alpha^T)$, についても同様に, $\pi_\alpha^*\rho_\alpha^T$ は S 上でうまく張り合い d_B-閉 basic $(1,1)$-形式 ρ^T を与えることがわかる．

さて, 上の横断的 Ricci 形式 ρ^T は佐々木計量 g の採り方に依存するが, 次のような佐々木構造の変形の下ではその横断的 de Rham コホモロジー類は不変である：

命題 5.8　$(S, g; \xi, \eta, \Phi)$ を佐々木多様体とする．φ は S 上の basic 関数で $d\eta + 2\sqrt{-1}\partial_B\bar\partial_B\varphi$ が ξ と横断的な方向に関して正定値であるとする．このとき, $\eta_\varphi = \eta + \sqrt{-1}(\bar\partial_B - \partial_B)\varphi$, $\omega_\varphi^T = d\eta/2 + \sqrt{-1}\partial_B\bar\partial_B\varphi$ により, 新たに佐々木多様体 $(S, g_\varphi; \xi, \eta_\varphi, \Phi)$ が得られる．

もちろん, この basic 関数による佐々木構造の変形の下, 横断的 Kähler 形式の basic de Rham 類は不変である．横断的 Ricci 形式についても同様であり, basic de Rham 類 $[\rho^T/2\pi]$ は横断的正則構造に関する不変量となる．これを **basic 第 1 Chern 類**と呼び $c_1^B(S, \Phi)$ と表す．basic 第 1 Chern 類が横断的に正である d_B-閉 basic $(1,1)$-形式で代表される場合 (S, Φ) は横断的に正であるという．佐々木-Einstein 多様体 $(S, g; \xi, \eta, \Phi)$ に対しては, 命題 5.4 より (S, Φ) は横断的に正である．しかし, 一般に, 横断的に正な佐々木多様体の basic 第 1 Chern 類が横断的 Kähler 形式により代表できるとは限らないことに注意が必要である．実際, 次が言える．

命題 5.9　basic 第 1 Chern 類が $\tau\, d\eta$（τ は定数）により代表されるための必要十分条件は $c_1(D) = 0$ である．ただし, $D = \mathrm{Ker}\,\eta$ とする[5)]．

第 2 節で定義された Kähler 多様体上の積分不変量 f は正則 Hamilton ベクトル場全体のなす Lie 環上の準同型として与えられた事を思い出そう．そこで今, 佐々木多様体上の横断的正則 Hamilton ベクトル場を次のように定義する；

定義 5.10　佐々木多様体 $(S, g; \xi, \eta, \Phi)$ 上の複素ベクトル場 X が次の 2 条件を満たすとき, X を**横断的正則 Hamilton ベクトル場**と呼ぶ：

(1) $d\pi_\alpha(X)$ は V_α 上の正則ベクトル場である.

(2) 複素数値関数 $u_X = \sqrt{-1}\eta(X)/2$ は

$$\bar\partial_B u_X = -\frac{\sqrt{-1}}{2} i(X) d\eta$$

を満たす. 横断的正則 Hamilton ベクトル場全体を $\mathfrak{h}(S,\xi,\Phi)$ と書く.

これで横断的 Kähler 構造に対する積分不変量を定義する準備が整った. まず, $(S,g;\xi,\eta,\Phi)$ はコンパクト $(2m+1)$-次元佐々木多様体で, basic 第 1 Chern 類が basic Kähler 類の $(2m+2)$ 倍に等しい, つまり

$$c_1^B(S,\Phi) = (2m+2)[d\eta/2]_B \tag{14}$$

を満たすとする. これは, 命題 5.9 で見たように, (S,Φ) が横断的に正で $c_1(D)=0$ を満たすことに対応する. この場合, El Kacimi-Alaoui による結果 [27] より実数値 basic 関数 h で

$$\rho^T - (m+1)d\eta = \sqrt{-1}\partial_B\bar\partial_B h \tag{15}$$

を満たすものが存在する. そこで, $X \in \mathfrak{h}(S,\xi,\Phi)$ に対して

$$f_\xi(X) = \int_S Xh(d\eta/2)^m \wedge \eta \tag{16}$$

とおくと, 定理 2.7 と同様に次の事を示すことが出来る.

定理 5.11 ([13], [36])　(16) で与えられる $\mathfrak{h}(S,\xi,\Phi)$ 上の関数は命題 5.8 の佐々木構造の変形の下一定であり, Lie 環 $\mathfrak{h}(S,\xi,\Phi)$ 上の準同型を与える. また, basic 関数 φ で $(S,g_\varphi;\xi,\eta_\varphi,\Phi)$ が佐々木-Einstein 多様体となるものが存在するなら $f_\xi = 0$ となる.

5.3　トーリック佐々木多様体

まず, トーリック佐々木多様体を定義し, その有理凸多面錐との関係を見る.

定義 5.12　佐々木多様体 $(S,g;\xi,\eta,\Phi)$ はその Riemann 錐 $(C(S),\bar g,J)$ がトーリック Kähler 多様体であるとき, **トーリック佐々木多様体**という.

$\dim S = 2m+1$ の場合, $(C(S),\bar g,J)$ には $(m+1)$ 次元トーラス T^{m+1} が効果的, 正則かつ等長的に作用しており, モーメント写像 $\mu : C(S) \to \mathfrak{t}^*$ は

$$\langle \mu(x), X\rangle = r^2\tilde\eta(X^\#(x))$$

となる, ここで, $\mathfrak{t}^*$ は T^{m+1} の Lie 環 $\mathfrak{t}$ の双対空間, $X\in\mathfrak{t}$, $X^\#(x) = d/dt_{|t=0}\exp(tX)x$ である.

定義 5.13　$\mathbb{Z}_{\mathfrak{t}} := \mathrm{Ker}\{\exp : \mathfrak{t} \to T^{m+1}\}$ とする. 部分集合 $\mathcal{C}\subset\mathfrak{t}^*$ が**有理凸多面錐**であるとは, 有限個の $\mathbb{Z}_{\mathfrak{t}}$ の元 $\{\lambda_j\}_{1\le j\le d}$ が存在し

$$\mathcal{C} = \{y\in\mathfrak{t}^* \mid \langle\lambda_j, y\rangle \ge 0,\ j=1,\cdots,d\}$$

と書けることである. 以下, $\{\lambda_j\}$ は次の意味で minimal であると仮定する；任意の j に対して

$$\mathcal{C} \ne \{y\in\mathfrak{t}^* \mid \langle\lambda_k, y\rangle \ge 0,\ k\ne j\}.$$

また, λ_j は primitive, すなわち, $\lambda_j = a\mu$ を満たす整数 $a \geq 2$ と $\mu \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{t}}$ は存在しないとしておく. この仮定の下, 空でない内点集合を持つ $\mathfrak{t}^*$ の有理凸多面錐 $\mathcal{C}$ が次の条件を満たすとき **good** であるという：もし,

$$\{y \in \mathcal{C} \mid \langle \lambda_{i_j}, y\rangle \geq 0,\ j = 1, \cdots, k\}, \quad \{i_1, \cdots, i_k\} \subset \{1, \cdots, d\}$$

が $\mathcal{C}$ の空でない面であるとき

$$\{\sum_{j=1}^{k} a_j\lambda_{i_j} \mid a_j \in \mathbb{R}\} \cap \mathbb{Z}_{\mathfrak{t}} = \{\sum_{j=1}^{k} a_j\lambda_{i_j} \mid a_j \in \mathbb{Z}\} \tag{17}$$

となる.

補題 5.14 ([43])　(S, g) を $(2m+1)$ 次元コンパクトトーリック佐々木多様体とする. このとき, トーリック Kähler 多様体 $(C(S), \bar{g}, J)$ のモーメント写像 μ の像 $\mathcal{C}(\mu)$ は good 有理凸多面錐である. また, Reeb ベクトル場 $\tilde{\xi}$ は双対錐

$$\mathcal{C}(\mu)^* = \{\alpha \in \mathfrak{t} \mid \text{任意の } X \in \mathcal{C}(\mu) \text{ に対して } \langle \alpha, X\rangle \geq 0\}$$

の内点 α により $\tilde{\xi} = \alpha^{\#}$ と表せる.

逆に, $\mathfrak{t}^*$ 内の good 有理凸多面錐 $\mathcal{C} \subset \mathfrak{t}^*$ と, その双対錐 $\mathcal{C}^* \subset \mathfrak{t}$ の内点 α が一つ与えられると, Delzant 構成により, Reeb ベクトル場が $\alpha^{\#}$ に等しく, モーメント写像の像が $\mathcal{C}$ となる $(2m+1)$ 次元コンパクトトーリック佐々木多様体を構成することが出来る（[19] の Proposition 3.4）. $\mathcal{C}^*$ の内点 α が無理点, つまり $\alpha \notin \mathbb{Q}_{\mathfrak{t}} = \mathbb{Z}_{\mathfrak{t}} \otimes \mathbb{Q}$ の場合がちょうど irregular な場合と対応する.

さて, 今までは, 一般のコンパクトトーリック佐々木多様体に関して見てきたが, もちろん, 常に横断的に正で $c_1(D) = 0$ となるわけではない. そこで次に, これらの条件はいつ成り立つかを見よう. まず, $\mathfrak{t}^* \simeq \mathbb{R}^{m+1} \simeq \mathfrak{t}$ と同一視する.

定義 5.15 ([19])　$\mathcal{C} = \{y \mid \langle \lambda_j, y\rangle \geq 0,\ j = 1, \cdots, d\} \subset \mathbb{R}^{m+1}$ を good 有理凸多面錐とする. ($\{\lambda_j\}$ は前ページの仮定を満たすとする.) $SL(m+1, \mathbb{Z})$ の元 g が存在し, 全ての $g\lambda_j$ の第 1 成分が正の整数 l に等しくなるとき, $\mathcal{C}$ を**高さ l のトーリックダイアグラム**と呼ぶ. 以下, 高さ l のトーリックダイアグラムという場合には, あらかじめ適当な $g \in SL(m+1 : \mathbb{Z})$ で変換することで, λ_j の第 1 成分は l になるようにしておく.

定理 5.16 ([19])　$(S, g; \xi, \eta, \Phi)$ を $(2m+1)$ 次元コンパクトトーリック佐々木多様体とする. もし (14) を満たすとすると, 正の整数 l が存在し, モーメント写像の像 $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^{m+1}$ は高さ l のトーリックダイアグラムとなり, $\tilde{\xi} = \alpha^{\#}$　($\alpha \in \mathcal{C}_c^* := (\mathcal{C}^*\text{の内部}) \cap \{(x^0, \cdots, x^m) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid x^0 = l(m+1)\}$) と書ける. 逆に高さ l のトーリックダイアグラムと $\alpha \in \mathcal{C}_c^*$ が与えられると, Delzant 構成により, Reeb ベクトル場が $\alpha^{\#}$ で (14) を満たす $(2m+1)$ 次元コンパクトトーリック佐々木多様体が得られる. また, この条件が成り立つ場合 $C(S)$ の標準束 $K_{C(S)}$ の l 乗 $K_{C(S)}^{\otimes l}$ は自明束となる.

例 5.17　$m = 2$ の場合, 高さ 1 のトーリックダイアグラム[6)] は次のように得られる. まず, $\mathbb{R}^2$ 内の正凸多角形 Δ をとり, その頂点を $v_j = (p_j, q_j) \in \mathbb{Z}^2$, $j = 1, \cdots, d$ とする. ただしこれらは, $v_1, v_2, \cdots, v_d, v_1$ の順番で互いに隣り合っているものとする. このとき, $\lambda_j = (1, p_j, q_j)$ とすると,

$\mathcal{C}_\Delta = \{(x,y,z) \mid x + p_j y + q_j z \geq 0,\ j = 1, \cdots, d\}$ は有理凸多面錐であり, good であれば高さ 1 のトーリックダイアグラムである.

命題 5.18　$\mathcal{C}_\Delta$ が good となるための必要十分条件は, 各 $j = 1, \cdots, d$ に対して

1. $|p_j - p_{j+1}|$ 又は $|q_j - q_{j+1}|$ のうち少なくとも一方は 1 である
2. $|p_j - p_{j+1}|$ と $|q_j - q_{j+1}|$ は互いに素である

のいずれかが成り立つことである. ここで, $v_{d+1} = v_1$ とした.

5.4　佐々木-Ricci ソリトン

佐々木-Einstein 計量の存在問題を調べるために, その一つの拡張として横断的 Kähler-Ricci ソリトン（ここでは佐々木-Ricci ソリトンと呼ぶ）を導入する.

定義 5.19　$(2m+1)$ 次元佐々木多様体 $(S, g; \xi, \eta, \Phi)$ と横断的正則 Hamilton ベクトル場 X の組が次式を満たすとき**佐々木-Ricci ソリトン**と呼ぶ.

$$\rho^T - (2m+2)\omega^T = L_X \omega^T \tag{18}$$

ここで, ρ^T, $\omega^T = d\eta/2$ はそれぞれ横断的 Ricci 形式, 横断的 Kähler 形式である.

上の定義より, 佐々木-Ricci ソリトンが存在すれば $c_1^B(S, \Phi) = (2m+2)[\omega^T]_B$ であり, 特に, 命題 5.4 より, $X = 0$ の場合が佐々木-Einstein 多様体である.

次に, 佐々木-Ricci ソリトンの存在問題を考えよう. 佐々木-Ricci ソリトンに対する積分不変量を, 以下のように定義する：まず, 横断的正則 Hamilton ベクトル場 X (Hamilton 関数 $u_X = \sqrt{-1}\eta(X)/2$) に対して $X + c\xi$, c は定数, も横断的正則 Hamilton ベクトル場で, $u_{X+c\xi} = u_X + \sqrt{-1}c/2$ である. そこで, 以下「横断的正則 Hamilton ベクトル場」といった場合には, $c\xi$ を足すことにより, その Hamilton 関数が

$$\int_S u_X e^h \omega^T \wedge \eta = 0 \tag{19}$$

を満たすように正規化したものを指す事にする. ただし, h は (15) により定義される実数値関数である. この, 正規化された横断的正則 Hamilton ベクトル場の Hamilton 関数は θ_X と書くことにする.

そこで, [57] に従い, 横断的正則 Hamilton ベクトル場 X に対して一般化された積分不変量 f_X を

$$f_X(v) = -\int_S \theta_v e^{\theta_X} \omega^T \wedge \eta$$

により定義すると, これは, 横断的正則構造 (S, ξ, Φ) の不変量となり, 佐々木-Ricci ソリトンが存在するための障害を与える. つまり, (S, g, X) を佐々木-Ricci ソリトンとすると任意の $v \in \mathfrak{h}(S, \xi, \Phi)$ に対して $f_X(v) = 0$ となる. また, f_0 は (16) で定義される積分不変量 f_ξ の定数倍に等しい. しかし, 次の命題より f_X はむしろ適切な X を見つけるための篩と思うことが出来る.

命題 5.20　$(S, g; \xi, \eta, \Phi)$ を (14) を満たす $(2m+1)$ 次元コンパクト佐々木多様体とする. このとき正規化された横断的正則 Hamilton ベクトル場 X で $f_X \equiv 0$ となるものが存在する.

さて, 上の命題の仮定を満たす佐々木多様体 $(S, g; \xi, \eta, \Phi)$ と横断的正則 Hamilton ベクトル場 X に対して, 実数値 basic 関数 φ による佐々木構造の変形 $(S, g_\varphi; \xi, \eta_\varphi, \Phi)$（命題 5.8）が佐々木-Ricci ソリトンとなるための必要十分条件は φ が Monge-Ampère 方程式

$$\frac{\det(g^T_{i\bar{j}}+\varphi_{i\bar{j}})}{\det(g^T_{i\bar{j}})} = \exp(-(2m+2)\varphi - \theta_X - X\varphi + h), \quad (g^T_{i\bar{j}}+\varphi_{i\bar{j}}) \text{ は正定値} \tag{20}$$

を満たすことである事がわかる（[36] を参照）．ここで, $g^T_{i\bar{j}}$ は横断的 Kähler 計量の成分であり, $\varphi_{i\bar{j}} = \partial^2\varphi/\partial z^i\partial\overline{z^j}$（$z^i$ は V_α の座標, 第 5.1 節参照）である．この方程式を continuity method で解くことを考えると, φ のアプリオリ評価（特に C^0 評価）を得ることが出来れば, 佐々木-Ricci ソリトンの存在を言うことができる．実際, Wang-Zhu [60] と同様の議論により, トーリックの場合にはアプリオリ評価を示すことが出来, 佐々木-Ricci ソリトンが存在することがわかる．

定理 5.21 ([36])　$(S, g; \xi, \eta, \Phi)$ を (14) を満たす $(2m+1)$ 次元コンパクトトーリック佐々木多様体とする．また, X を $f_X \equiv 0$ となる横断的正則 Hamilton ベクトル場とする．このとき T^{m+1} 不変実数値 basic 関数 φ が存在し, $(S, g_\varphi; \xi, \eta_\varphi, \Phi)$ と X の組は佐々木-Ricci ソリトンとなる．

さらに, 積分不変量 f_ξ が恒等的に消える場合には, 命題 5.20 の横断的正則 Hamilton ベクトル場として $X = 0$ を採ることが出来るので, 定理の系として次の事が言える．

系 5.22 ([36])　$(S, g; \xi, \eta, \Phi)$ を (14) を満たす $(2m+1)$ 次元コンパクトトーリック佐々木多様体とする．また, 積分不変量 f_ξ が恒等的に 0 であるとする．このとき, T^{m+1} 不変実数値 basic 関数 φ が存在し, $(S, g_\varphi; \xi, \eta_\varphi, \Phi)$ はトーリック佐々木-Einstein 多様体となる．

5.5　体積最小化

系 5.22 により, トーリック佐々木多様体の場合には, もし積分不変量 f_ξ が恒等的に 0 となるような $\xi = \alpha^\#$, $\alpha \in \mathcal{C}_c^*$ が存在すれば, ξ を Reeb ベクトル場とするようなトーリック佐々木-Einstein 計量が存在する．トーリックファノ多様体の場合には, 同様の結果が Wang-Zhu [60] により得られているが, この場合には積分不変量が消えない例（例えば複素射影平面の 1 点または 2 点ブローアップ）が存在し, 常に Kähler-Einstein 計量が存在するわけではなかった．一方トーリック佐々木多様体の場合には, Martelli-Sparks-Yau [48], [49] により提唱された「佐々木-Einstein 多様体の体積最小化」[7] 条件より, $f_{\xi_0} \equiv 0$ となる $\xi_0 = \alpha_0^\#$, $\alpha_0 \in \mathcal{C}_c^*$ が唯一つ存在することがわかり, ξ_0 を Reeb ベクトル場とするようなトーリック佐々木-Einstein 計量が存在することになる．この小節では, 以上の事を見ていく．

まず, S を $(2m+1)$ 次元コンパクト多様体, $Riem(S)$ を S 上の Riemann 計量全体のなす空間とする．もし, $g_0 \in Riem(S)$ で $Ric_{g_0} = 2mg_0$ を満たすものが存在したとすると, g_0 は $Riem(S)$ 上の Einstein-Hilbert 汎関数

$$\mathcal{S}(g) := \int_S (s(g) + 2m(1-2m))dvol_g$$

の臨界点となる（例えば Besse [5] の第 4 節参照）．ここで, $s(g)$, $dvol_g$ はそれぞれ g のスカラー曲率, 体積要素である．したがって, 佐々木-Einstein 計量が存在した場合には, Einstein-Hilbert 汎関数の臨界点となる．佐々木-Einstein 多様体の体積最小化条件とはこの事実と, Einstein-Hilbert 汎関数を佐々木計量全体がなす空間のある部分集合に制限したものが, 正の定数倍を除いて, 体積汎関数に一致すること（命題 5.24）から帰着されるものである．そこで, この佐々木計量の変形空間を以下定義する．前小節までは命題 5.8 に基づく佐々木計量の変形, つまり, Reeb ベクトル場と横断的正則構造を固定した変形だけを考えていたが, ここでは, Reeb ベクトル場も動かすような佐々木計量の変形を考

えることが本質的に必要である．このような変形を扱うには, 錐 $C(S)$ から眺めてやった方が見通しが良い．今, $(S, g_0; \xi_0, \eta_0, \Phi_0)$ を $(2m+1)$ 次元コンパクト佐々木多様体で, 錐 $(C(S), \bar{g}_0, J)$ は Kähler かつ, 第 1 Chern 類 $c_1(C(S))$ が 0 となるものとする．例えば $c_1(S, \Phi_0) = (2m+2)[d\eta_0/2]_B$ となる場合にはこの条件を満たす．また, $(C(S), \bar{g}_0, J)$ の正則等長変換群の極大トーラスを T とする．

定義 5.23 $\bar{g}$ を複素多様体 $(C(S), J)$ 上の Kähler 計量とする．S 上の Riemann 計量 g と微分同相写像 $\Psi_{\bar{g}} : C(S) \to \mathbb{R}_+ \times S$ が存在し, $\bar{g} = \Psi_{\bar{g}}^*(ds^2 + s^2 g)$ と書けるとき $\bar{g}$ を **Kähler 錐計量**と呼ぶ．このとき, もちろん, g は S 上の佐々木計量である．

また, g の Reeb ベクトル場及び接触形式を $(C(S), J)$ 上で表現すると

$$\tilde{\xi}_{\bar{g}} = J r_{\bar{g}} \frac{\partial}{\partial r_{\bar{g}}}, \quad \tilde{\eta}_{\bar{g}} = \sqrt{-1}(\bar{\partial} - \partial) \log r_{\bar{g}}$$

となる．ここで $r_{\bar{g}} = pr_1 \circ \Psi_{\bar{g}}$ （$pr_1 : \mathbb{R}_+ \times S \to \mathbb{R}_+$ は第 1 成分への射影）である．そこで, 佐々木計量の変形空間として, $(C(S), J)$ 上の Kähler 錐計量の空間を考えることが出来る． ここでは, $KCM(C(S), J)$ を Kähler 錐計量 $\bar{g}$ で $(C(S), \bar{g}, J)$ の正則等長変換群の極大トーラスが T となるもの全体の集合を表すことにする． すると, トーリック佐々木多様体の場合と同様に, Kähler 多様体 $(C(S), \bar{g}, J)$ の T-作用に関するモーメント写像の像 $\mathcal{C}$ は T の Lie 環 $\mathfrak{t}$ の双対 $\mathfrak{t}^*$ 内の有理凸多面錐となり, Reeb ベクトル場は $\mathcal{C}$ の双対 $\mathcal{C}^*$ の内点と対応する．また, 条件 (14) を満たす場合には, 定理 5.16 のように, Reeb ベクトル場は $\mathcal{C}^*$ とある $\mathfrak{t}$ 内の超平面との共通部分（凸多面体になる）の内部 $\mathcal{C}_c^*$ に対応することがわかる（この超平面の採り方に関しては [49], [36] を参照）．そこで,

$$KCM_c = \{\bar{g} \in KCM(C(S), J) \mid \tilde{\xi}_{\bar{g}} \in \mathcal{C}_c^*\}$$

とし, 各 $\tilde{\xi} \in \mathcal{C}_c^*$ に対して $KCM_c(\tilde{\xi}) = \{\bar{g} \in KCM_c \mid \tilde{\xi}_{\bar{g}} = \tilde{\xi}\}$ と書く．命題 5.4 より, $KCM(C(S), J)$ 内に Ricci 平坦 Kähler 錐計量 $\bar{g}$ (つまり, g が佐々木-Einstein 計量) が存在したとすると, $\bar{g} \in KCM_c$ である．

命題 5.24 ([49]) $\bar{g} \in KCM_c$ とし, 対応する S 上の佐々木計量を g とする．このとき

$$\mathcal{S}(g) = 4m\mathrm{Vol}(S, g) \tag{21}$$

となる．つまり, $\bar{g}$ と g とを対応させることで, KCM_c を $Riem(S)$ の部分集合と思うと, KCM_c 上の汎関数として $\mathcal{S}_{|KCM_c} = 4m\mathrm{Vol}$ である．

また, S 上の体積汎関数の $KCM(C(S), J)$ への制限について, 次の第 1 変分公式が成り立つ．

命題 5.25 ([49]) $\{\overline{g_t}\}_{-\varepsilon<0<\varepsilon}$ を $KCM(C(S), J)$ 内の 1-パラメータ族とする．このとき,

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Vol}(S, g_t)_{|t=0} = -(m+1)\int_S \eta(X) dvol \tag{22}$$

である．ここで, η, $dvol$ はそれぞれ g_0 の接触形式及び体積要素であり, $\mathfrak{t} \ni X = d\xi_t/dt_{|t=0}$ である．

系 5.26 各 $\tilde{\xi} \in \mathcal{C}_c^*$ に対して $KCM_c(\tilde{\xi})$ 上体積汎関数は一定である．

したがって, $\mathcal{S}_{|KCM_c}$ は $\mathcal{C}_c^*$（有限次元凸多面体の内部）上の関数へ落ちる．これを $\tilde{\mathcal{S}} : \mathcal{C}_c^* \to \mathbb{R}$ と書く．体積汎関数の第 2 変分公式（[49]）も考慮に入れると次が得られる．

定理 5.27 (佐々木-Einstein 計量の体積最小化条件, [49]) $\bar{g} \in KCM_c$ が Ricci 平坦であると

すると, その Reeb ベクトル場 $\tilde{\xi}_{\tilde{g}} \in \mathcal{C}_c^*$ は $\tilde{\mathcal{S}}$ の最小点である.

例 5.28　$(S, g_0; \xi_0, \eta_0, \Phi_0)$ を $(2m+1)$ 次元コンパクトトーリック佐々木多様体で, (14) を満たすものとする. この場合極大トーラス T は $(m+1)$ 次元トーラスであり, KCM_c の元は全て (14) を満たすコンパクトトーリック佐々木計量である. この場合, 第 5.3 節で見たとおり, モーメント写像の像 $\mathcal{C}$ は $\mathbb{R}^{m+1}$ 内の高さ l のトーリックダイアグラムである. また, この場合, 関数 $\tilde{\mathcal{S}}$ は

$$\tilde{\mathcal{S}}(\tilde{\xi}) = 8m(m+1)(2\pi)^{m+1}\mathrm{Vol}(\Delta(\tilde{\xi}))$$

で与えられる（[48] 参照）. ここで, $\Delta(\tilde{\xi}) = \{x \in \mathcal{C} \mid \tilde{\xi} \cdot x \leq 1\}$ であり, $\mathrm{Vol}(\Delta(\tilde{\xi}))$ はその Euclid 内積に関する体積である. この関数は $\mathcal{C}$ の組合せ的なデータのみで求めることが出来, $\mathcal{C}_c^*$ 上凸かつ proper となることがわかるので, 唯一つの最小点 $\tilde{\xi}_{min} \in \mathcal{C}_c^*$ を持つ.

さて, 定理 5.27 は $KCM_c(\tilde{\xi})$, $\tilde{\xi} \in \mathcal{C}_c^*$ に Ricci 平坦な Kähler 錐計量が存在するための一つの必要条件を与えるが, 実は, この条件は積分不変量 $f_{\tilde{\xi}}$ が消えるという条件（定理 5.11）を導くことが, quasi-regular の場合には Martelli-Sparks-Yau [49] により, 一般の場合には筆者及び Wang [36] により示されている.

定理 5.29 ([49], [36])　各 $\tilde{\xi} \in \mathcal{C}_c^*$ に対して $\tilde{\mathcal{S}}$ の $\tilde{\xi}$ における第 1 変分 $d_{\tilde{\xi}}\tilde{\mathcal{S}}$ は $-\sqrt{-1}f_{\tilde{\xi}}$ に等しい.

したがって, 系 5.22, 例 5.28 及び定理 5.29 より, 次が従うことがわかる.

定理 5.30 ([36])　$(S, g; \xi, \eta, \Phi)$ を (14) を満たす $(2m+1)$ 次元コンパクトトーリック佐々木多様体とし, $\tilde{\xi}_{min} \in \mathcal{C}_c^*$ を $\tilde{\mathcal{S}}$ の最小点とする. このとき, $KCM_c(\tilde{\xi}_{min})$ の中に Ricci 平坦トーリック Kähler 錐計量 $\overline{g_{SE}}$ （g_{SE} はトーリック佐々木-Einstein 計量）が存在する. また, $\tilde{\xi} \neq \tilde{\xi}_{min}$ については $KCM_c(\tilde{\xi})$ の中に Ricci 平坦な計量は存在しない, つまり, $\tilde{\xi}$ を Reeb ベクトル場とする佐々木-Einstein 計量は存在しない.

例 5.31　命題 5.18 より

$$\lambda_1 = (1,0,0),\ \lambda_2 = (1,1,0),\ \lambda_3 = (1,2,1),\ \lambda_4 = (1,1,2),\ \lambda_5 = (1,0,1)$$

により定まる $\mathbb{R}^3$ 内の有理凸多面錐 $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot \lambda_i \geq 0,\ i = 1,2,3,4,5\}$ は高さ 1 のトーリックダイアグラムである. Delzant 構成により得られるトーリック複素多様体 $(C(S), J)$ は $\mathbb{C}P^2$ の 2 点ブローアップ dP_2 の標準束から零切断を引いたものである. また, [48] の計算から

$$\tilde{\xi}_{min} = (3, \frac{9}{16}(-1+\sqrt{33}), \frac{9}{16}(-1+\sqrt{33}))$$

と求まる. したがって, この場合には irregular なトーリック佐々木-Einstein 計量が存在する. 一方, dP_2 は 0 でない積分不変量を持つので, Kähler-Einstein 計量を持たなかったが, このことは, 定理 5.30 と $\tilde{\xi}_{min}$ が有理ベクトルではないことからも直ちにわかる.

さらに, 定理 5.30 の直接的応用として次を得る.

定理 5.32 ([19])　各 $k \in \mathbb{N}$ に対し, $S^2 \times S^3$ の k 個の連結和 $k(S^2 \times S^3)$ には可算無限個の変形非同値なトーリック佐々木-Einstein 計量が存在する.

この結果のトーリックでない場合は Boyer, Galicki, Nakamaye, Kóllar 等により知られていた（[10], [11], [42]）. また, トーリックの場合でも k が奇数の場合は van Coevering [58] が別の方法で構成している[8)].

また, 定理 5.30 の別の応用として以下を得る.

定理 5.33　M をトーリック Fano 多様体とし, L をある自然数 p に対し $K_M = L^{\otimes p}$ となるような正則直線束とする．このとき，各自然数 k に対し，$L^{\otimes k}$ の全空間に完備スカラー平坦 Kähler 計量が存在する．この計量は $k = p$ のとき，Ricci 平坦である.

この結果のうち M が $\mathbb{CP}^2$ の 1 点 blow-up の場合の完備スカラー平坦 Kähler 計量は 大田-安井 [53] により全く違う方法で得られていた.

定理 5.34　(S, g) をコンパクト佐々木-Einstein 多様体，$(C(S), J, \bar{g})$ をその Kähler 錐多様体とする．このとき以下が成立する.

(a)　$(C(S), J)$ には完備スカラー平坦 Kähler 計量が存在する.

(b)　任意の負の定数 c に対してある $\gamma > 0$ が存在して，$C(S)$ の部分多様体 $\{0 < r < \gamma\}$ はスカラー曲率が恒等的に c に等しい完備 Kähler 計量が存在する.

従って特に，高さ一定のトーリックダイアグラムから作られるトーリック Kähler 錐 $C(S)$ は完備スカラー平坦 Kähler 計量を持つ.

定理 5.33 と 5.34 の特別な場合として次が得られる.

定理 5.35 ([35])　トーリック Fano 多様体 M の標準直線束 K_M の全空間には完備リッチ平坦 Kähler 計量が存在する.

この定理は 江口-Hanson 計量（$M = \mathbb{CP}^1$, [26]），Calabi の計量（$M = \mathbb{CP}^m$, [14]）の拡張である.

定理 5.36 ([35])　トーリック Fano 多様体 M の標準直線束 K_M の全空間から零切断を除いた空間にはスカラー曲率 0 の完備 Kähler 計量が存在する.

定理 5.35,　5.36 の証明はモーメント構成（[41] を参照) を η-Einstein 佐々木多様体に対して適用して得られる.

5.6　トーリック佐々木-Einstein 計量の一意性

次に, 佐々木-Einstein 計量の一意性について見てみることにしよう．まず, 正の Kähler-Einstein 計量の場合と同様, ここで言う「一意性」は次の横断的正則自己同型群の単位元を含む連結成分 $Aut(C(S), \tilde{\xi})_0$ の元で移りあうものを除いて一意であるということである.

定義 5.37　$(S, g; \xi, \eta, \Phi)$ を佐々木多様体, $(C(S), \bar{g}, J)$ をその Kähler 錐とする．$(C(S), J)$ の正則自己同型で, $\tilde{\xi} - \sqrt{-1}J\tilde{\xi}$ が生成する正則な flow と可換であるものを**横断的正則自己同型**という. 横断的正則自己同型のなす群の連結成分を $Aut(C(S), \tilde{\xi})_0$ と書く.

Kähler 幾何においては, 同じ Kähler 類を持つ Kähler 計量全体の空間における測地線の存在を用いて, 定スカラー曲率 Kähler 計量の一意性を示す方法はよく知られている, 例えば [16]，[46] 参照. 特に, トーリックの場合には Kähler ポテンシャルの Legendre 双対であるシンプレクティックポテンシャルを用いる事で測地線の存在は容易に確かめることができる（Guan [39] による）．この手法を（トーリック）佐々木多様体の場合に適用することで一意性を示すことが出来る.

今, $(S, g; \xi, \eta, \Phi)$ を (14) を満たす $(2m+1)$ 次元コンパクト佐々木多様体とする.

$$\mathcal{K}(\tilde{\xi}) := \{\varphi : T \text{ 不変 basic 関数} \mid \omega^T + \sqrt{-1}\partial_B \bar{\partial}_B \varphi > 0\}$$

とおく．ここで, $\mathcal{K}(\tilde{\xi})/\mathbb{R} \simeq KCM_c(\tilde{\xi})$，$\varphi$+(定数)$\mapsto g_\varphi$ である（g_φ は命題 5.8 により与えられる佐々木計量）．$\mathcal{K}(\tilde{\xi})$ 内の測地線 $\{\varphi_t\}$ を方程式

$$\ddot{\varphi}_t - |\bar{\partial}\dot{\varphi}_t|^2_{\omega_t} = 0 \tag{23}$$

により定義する．このとき, Kähler の場合と同様に, 横断的 Kähler 構造に関する満渕 energy の凸性を用いて次がいえる．

命題 5.38　$(S, g_{\varphi_i}; \xi, \eta_{\varphi_i}, \Phi)$, $i = 1, 2$ をコンパクト佐々木-Einstein 多様体とする．もし φ_1 と φ_2 を結ぶ $\mathcal{K}(\tilde{\xi})$ 内の測地線が存在すると, $\alpha \in Aut(C(S), \tilde{\xi})_0$ が存在して $\alpha^* g_{\varphi_2} = g_{\varphi_1}$ となる．

さらにトーリック佐々木多様体の場合に Guan の手法により測地線の存在を証明することが出来, 次を得る．

定理 5.39 ([19])　$(S, g_{\varphi_i}; \xi_{min}, \eta_{\varphi_i}, \Phi)$, $i = 1, 2$ をコンパクトトーリック佐々木-Einstein 多様体とする．このとき, $\alpha \in Aut(C(S), \tilde{\xi})_0$ が存在して $\alpha^* g_{\varphi_2} = g_{\varphi_1}$ となる．

5.7　佐々木-Einstein 計量の存在に対する障害

前小節までで, トーリックの場合の佐々木-Einstein 計量の存在および一意性の問題は解決した．では, トーリックではない場合はどうなるであろうか？　本小節では, Gauntlett-Martelli-Sparks-Yau [38] により与えられた佐々木-Einstein 計量が存在するための障害（Bishop の障害, Lichnerowicz の障害）を紹介する．これらは横断的 Kähler 構造を介して得られるものではなく[9), 錐 $(C(S), J, \tilde{\xi})$ の複素関数論的な構成から得られる不変量および, 佐々木-Einstein 多様体 (S, g) に関するリーマン幾何的な要請から得られる条件である．

まず, $(S, g; \xi, \eta, \Phi)$ をコンパクト佐々木多様体, $(C(S), \bar{g}, J)$ をその Kähler 錐とする．このとき,

$$H(S) = \{f \in C^\infty(S) |\ ^\exists \tilde{f} : \{r \leq 1\} \text{ 上の正則関数}, \tilde{f}_{|\{r=1\}} = f, \tilde{f} \to 0\ (r \to 0)\} \text{ の } L^2\text{-閉包}$$

とおく．$H(S)$ は Hardy 空間と呼ばれる．$\xi/\sqrt{-1}$ の $H(S)$ への制限（T と書く）は自己随伴で至る所正の表象を持つ 1 階の Toeplitz 作用素である（例えば, Toeplitz 作用素およびそのスペクトルについては [8] を参照）．

命題 5.40　T は非負の離散スペクトルを持つ．

Proof. まず, [8] より T は下に有界な離散スペクトルを持つ．あとは, 非負である事を見ればよい．$f \in H(S)$ は $Tf(= \xi f/\sqrt{-1}) = \lambda f$ を満たすとする．このとき, f の正則拡張 $\tilde{f}$ は $\tilde{f} = r^\lambda f$ により与えられることがわかり, $H(S)$ の定義より $\lambda \geq 0$ である．　□

T の固有値は (S, ξ, Φ)（または $(C(S), J, \tilde{\xi})$）に関する不変量であり, ここでは [49], [38] に従い, (S, ξ, Φ) の**チャージ**と呼ぶことにする．

例 5.41　$(S, g; \xi, \eta, \Phi)$ が regular 佐々木多様体の場合, つまり, S が Kähler 多様体 (M, ω) 上の豊富な直線束 L の双対 L^* に随伴する $U(1)$ 束の全空間で, ξ が $U(1)$ 作用の生成元（の定数倍）である場合には,

$$H(S) \simeq \bigoplus_{k=0}^{\infty} H^0(M; L^k)$$

であり, 各 $H^0(M; L^k)$ がチャージ k（の定数倍）の固有空間に対応する．

系 5.26 より佐々木多様体の体積も (S, ξ, Φ) の不変量であるが, この量はチャージの漸近挙動から求まる[10)．つまり, 体積はチャージにより決定される．

定理 5.42 ([49], [8])　$0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \cdots$ を $(2m+1)$ 次元コンパクト佐々木多様体 $(S, g; \xi, \eta, \Phi)$ のチャージとする．このとき，

$$\mathrm{Vol}(S, g) = \gamma_{2m+1} \lim_{t \searrow 0} t^{m+1} \sum_{j=0}^{\infty} \exp(-t\lambda_j) \tag{24}$$

となる．ここで γ_{2m+1} は $(2m+1)$ 次元単位球面の体積である．

また，チャージは (S, ξ, Φ) に関する不変量ではあるが，佐々木計量に関するラプラシアンの固有値とは次のような関係がある．

命題 5.43　$Tf = \lambda f,\ f \in H(S)$，とすると $\Delta_S f = \lambda(\lambda + 2m) f$ である．ここで，Δ_S は佐々木多様体 $(S, g; \xi, \eta, \Phi)$ の関数に作用するラプラシアンである．

Proof. f の正則拡張は $\tilde{f} = r^{\lambda} f$ により与えられた．$(\{r \leq 1\}, \bar{g}, J)$ は Kähler であったので，$\tilde{f}$ は調和関数である．$\Delta_{C(S)}$ を $(\{r \leq 1\}, \bar{g})$ の関数に作用するラプラシアンとすると，

$$\begin{aligned} 0 = \Delta_{C(S)} \tilde{f} &= \frac{1}{r^2} \Delta_S (r^{\lambda} f) - \frac{1}{r^{2m+1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{2m+1} \frac{\partial}{\partial r} \right) (r^{\lambda} f) \\ &= r^{\lambda - 2} (\Delta_S f - \lambda(\lambda + 2m) f) \end{aligned}$$

□

さて，ここで，ラプラシアンの固有値に関する Lichnerowicz の定理（[45]）及び，体積に関する Bishop の定理（[6]）より，次のような佐々木-Einstein 計量が存在するための必要条件が得られる．

定理 5.44 (Lichnerowicz の障害，[38])　$(S, g; \xi, \eta, \Phi)$ を $(2m+1)$ 次元コンパクト佐々木-Einstein 多様体とする．このとき (S, ξ, Φ) の正の最小チャージ λ_1 は 1 以上である[11)]．

定理 5.45 (Bishop の障害，[38])　$(S, g; \xi, \eta, \Phi)$ を $(2m+1)$ 次元コンパクト佐々木-Einstein 多様体とする．このとき，$\mathrm{Vol}(S, g)$（これは (S, ξ, Φ) の不変量）は γ_{2m+1} 以下である．

例 5.46 ([38], [8])　Lichnerowicz, Bishop の障害を用いて，擬斉次多項式により与えられる孤立超曲面特異点の link として得られる佐々木多様体で佐々木-Einstein 計量を許容しないものが存在することがわかる：$\mathbb{C}^{m+2}$ への $\mathbb{C}^*$ 作用が

$$(z_0, \cdots, z_{m+1}) \mapsto (q^{w_0} z_0, \cdots, q^{w_{m+1}} z_{m+1}), \quad \boldsymbol{w} = (w_0, \cdots, w_{m+1}) \in \mathbb{N}^{m+2},\ q \in \mathbb{C}^*$$

により与えられているとする．また，$\mathbb{C}^{m+2}$ 上の多項式 F は

$$F(q^{w_0} z_0, \cdots, q^{w_{m+1}} z_{m+1}) = q^d F(z_0, \cdots, z_{m+1}), \quad d \in \mathbb{N}$$

を満たし，$X = \{F = 0\} \subset \mathbb{C}^{m+2}$ は原点以外特異点を持たないとする．このとき，X には $\mathbb{C}^*$ 作用が誘導される．さらに，$|\boldsymbol{w}| = \sum w_j > d$ を仮定する．この条件は $X/\mathbb{C}^*$ の Fano 性に対応する．ζ を $S^1 \subset \mathbb{C}^*$ 作用の生成元とし，

$$\tilde{\xi} = \frac{m+1}{|\boldsymbol{w}| - d} \zeta$$

と正規化すると，$\tilde{\xi} \in \mathcal{C}_c^*$ である事がわかる（[38] 参照）．もちろん，この $\tilde{\xi}$ が $\tilde{S}$ の最小点でない場合

には $KCM_c(\tilde{\xi})$ 内には Ricci 平坦な計量は存在しない．そこで, $\tilde{\xi}$ は $\tilde{S}$ の最小点であると仮定する．例えば, 荷重射影空間の Fano 超曲面 $X/\mathbb{C}^*$ が離散的な自己同型群しか持たない場合にはこの仮定は成り立つ．このとき,

$$\lambda_1 = \frac{(m+1)\min\{w_j\}}{|\boldsymbol{w}|-d}, \quad \mathrm{Vol} = \frac{d\gamma_{2m+1}(|\boldsymbol{w}|-d)^{m+1}}{(m+1)^{m+1}\prod w_j} \tag{25}$$

と求めることが出来る．この λ_1, Vol が定理 5.44, 5.45 の条件を満たさないような $\boldsymbol{w}$ を選べば, X 上には $\tilde{\xi}$ を Reeb ベクトル場とするような Ricci 平坦 Kähler 錐計量は存在しない.

例えば $F(z_0, \cdots, z_{m+1}) = z_0^{a_0} + \cdots + z_{m+1}^{a_{m+1}}$ の場合には

$$|\boldsymbol{w}| > d \iff \frac{1}{a_0} + \cdots + \frac{1}{a_{m+1}} > 1$$

であり,

$$\lambda_1 \geq 1 \iff (m+1)\min\{1/a_j\} \geq \frac{1}{a_0} + \cdots + \frac{1}{a_{m+1}} - 1 \tag{26}$$

$$\mathrm{Vol} \leq \gamma_{2m+1} \iff (\prod a_j)(\frac{1}{a_0} + \cdots + \frac{1}{a_{m+1}} - 1) \leq (m+1)^{m+1} \tag{27}$$

と書ける．例えば, $m = 2,\ a_0 = a_1 = a_2 = 2,\ a_3 = k > 4$ とすると, (26) は成立しない．また, このとき, 体積最小化により, 上で与えられる $\tilde{\xi}$ に関する積分不変量は 0 である事がわかる, [38] を参照せよ．したがって $\{z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^k = 0\} \subset \mathbb{C}^4,\ k > 4$ 上には Ricci 平坦 Kähler 錐計量は存在しないことがわかる[12)].

最後に安定性と佐々木-Einstein 計量の存在との関係についてコメントしておこう．まず, 佐々木多様体は, 特に irregular な場合には, 何かしら代数幾何的対象としては捉え難い．したがって, GIT 安定性（漸近的 Chow 安定性）との関連（第 3 節）や K-安定性との対応（第 4 節）の佐々木ヴァージョンは, 少なくとも Kähler の場合と全く同じ形では, 存在しないと思われる．一方, Bergman 核（Szegö 核）に関する解析は佐々木多様体の場合でも可能であり, 実際, 上で見たように, チャージ（の最小値および漸近挙動）は佐々木-Einstein 計量の存在に関して重要な情報を持っている．したがって, 佐々木多様体においては GIT 安定性との関係はわからないが, その漸近解析的な情報が佐々木-Einstein（定スカラー曲率佐々木）計量の存在と関係があるのではないだろうか？

注　釈

1)　無論, この状況は今でも変わっていないが.
2)　ただし, locally cyclic な軌道体
3)　本来はむしろこれら S 上のベクトル場 ξ, 1-形式 η こそが一般の接触幾何においてに Reeb ベクトル場, 接触形式として扱われるものである.
4)　locally cyclic な軌道体
5)　実際, 横断的に正であるが $c_1(D) \neq 0$ となるような佐々木多様体の例は例えば [12] を参照.
6)　[44] により, S が単連結であれば, 定理 5.16 で得られるトーリックダイアグラムは高さ 1 である．逆は必ずしも成り立たない [19].
7)　AdS/CFT 対応の研究の流れの中で現れてきたものであるが, そこから切り離してしまっても自然に現れる条件である.
8)　全て quasi-regular である
9)　著者が気付いていないだけで, 横断的 Kähler 構造から直接得られるのかもしれない.
10)　[49] では局所化, 指数定理が用いられているが幾分不明確な点が見受けられる.
11)　(14) を満たす regular な佐々木多様体については常に $\lambda_1 \geq 1$ が成り立ち, この条件は佐々木-Einstein 計量の存在に関する障害を与えないことが [38] におい

て示されている. つまり, Kähler-Einstein 計量の存在に関する障害ではなく, 佐々木幾何固有の障害である.

12) 実は $k \geq 3$ についても同様の結果が得られる, [38], [18] を参照.

文 献

[1] M. Abreu : Kähler geometry of toric manifolds in symplectic coordinates, Fields Institute Comm. vol. 35, 1-24, AMS, 2003.

[2] T. Aubin : Equations du type de Monge-Ampère sur les variétés kählériennes compactes, C. R. Acad. Sci. Paris, **283**, 119-121 (1976)

[3] S. Bando : An obstruction for Chern class forms to be harmonic, Kodai Math. J., 29(2006), 337-345.

[4] 板東重稔 : Einstein-Kähler 計量の存在問題 —正スカラー曲率の場合— , 数学 50 巻 (1998), 358-367.

[5] A. L. Besse : Einstein Manifolds, Ergebnisse der Mathematik, 3. Folge, Band 10, Springer Verlag, New York (1987).

[6] R. L. Bishop and R. J. Crittenden : Geometry of manifolds, Academic Press, New York (1964).

[7] D. E. Blair : Riemannian Geometry of Contact and Symplectic manifolds, Progress in Math. 203, Birkhäuser (2001).

[8] L. Boutet de Monvel and V. Guillemin : The spectral theory of Toeplitz operators, Annals of Math. Studies 99, Princeton University Press, (1981).

[9] C. P. Boyer and K. Galicki : Sasakian geometry, Oxford Mathematical Monographs (2007).

[10] C. P. Boyer, K. Galicki, and J. Kollár, Einstein metrics on spheres, Ann. of Math.,162 (2005), no. 1, 557-580.

[11] C. P. Boyer, K. Galicki, and M. Nakamaye : On the geometry of Sasakian-Einstein 5-manifolds, Math. Ann. 325 (2003), no. 3, 485-524.

[12] C. P. Boyer, K. Galicki and L. Ornea : Constructions in Sasakian geometry, math.DG/0602233.

[13] C. P. Boyer, K. Galicki and S. R. Simanca : Canonical Sasakian metrics, math.DG/0604325.

[14] E. Calabi : Métriques Kähleriennes et fibrés holomorphes, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 12(1979), 268-294.

[15] E. Calabi : Extremal Kähler metrics II, Differential geometry and complex analysis, (I. Chavel and H.M. Farkas eds.), 95-114, Springer-Verlag, Berline-Heidelberg-New York, (1985)

[16] X. X. Chen : The space of Kähler metrics, J. Diff. Geom. 56 (2000), 189-234.

[17] X.X. Chen and G. Tian : Geometry of Kähler metrics and holomorphic foliations by discs, math.DG/0409433.

[18] D. Conti : Cohomogeneity one Einstein-Sasaki 5-manifolds, math.DG/0606323.

[19] K. Cho, A. Futaki and H. Ono : *Uniqueness and examples of toric Sasaki-Einstein manifolds*, to appear in Comm. Math. Phys., math.DG/0701122

[20] W. Ding and G.Tian : Kähler-Einstein metrics and the generalized Futaki invariant, Invent. Math., **110**, 315-335 (1992)

[21] S.K. Donaldson : Remarks on gauge theory, complex geometry and four-manifold topology, in 'Fields Medallists Lectures' (Atiyah, Iagolnitzer eds.), World Scientific, 1997, 384-403.

[22] S.K. Donaldson : Scalar curvature and projective embeddings, I, J. Differential Geometry, 59(2001), 479-522.

[23] S.K. Donaldson : Scalar curvature and stability of toric varieties, J. Differential Geometry, 62(2002), 289-349.

[24] S.K. Donaldson : Lower bounds on the Calabi functional, J. Differential Geometry, 70(2005), 453-472.

[25] S.K. Donaldson and P.B. Kronheimer : The geometry of four manifolds, Oxford Mathematical Monographs, Claren Press, Oxford, 1990.

[26] T. Eguchi and A. J. Hanson : Self-dual solutions to Euclidean gravity, Ann. of Phys., 120 (1979), 82-106.

[27] A. El Kacimi-Alaoui : Opérateurs transversalement elliptiques sur un feuilletage riemannien et applications, Compositio Math. 79 (1990), 57-106.

[28] 藤木 明 : 偏極代数多様体の moduli 空間と Kähler 計量, 数学 42 巻 (1990), 231-243.

[29] A. Futaki : An obstruction to the existence of Einstein Kähler metrics, Invent. Math. **73**, 437-443 (1983)

[30] 二木昭人 : Kähler 幾何と積分不変量, 数学 44 巻 (1992), 44-56.

[31] A. Futaki : Asymptotic Chow stability and integral invariants, Intern. J. Math., **15**, 967-979, (2004).

[32] A. Futaki : Stability, integral invariants and canonical Kähler metrics, Proc. 9-th Internat. Conf. on Differential Geomtry and its Applications, 2004 Prague, (eds. J. Bures et al), 2005, 45-58, MATFYZPRESS, Prague.

[33] A. Futaki : Harmonic total Chern forms and stability, Kodai Math. J. Vol. 29, No. 3 (2006), 346-369.

[34] A. Futaki : Holomorphic vector fields and perturbed extremal Kähler metrics, to appear in J. Symplectic Geom., math.DG/0702721.

[35] A. Futaki : Complete Ricci-flat Kähler metrics on the canonical bundles of toric Fano manifolds, math.DG/0703138

[36] A. Futaki, H. Ono and G. Wang : Transverse Kähler geometry of Sasaki manifolds and toric Sasaki-Einstein manifolds, math.DG/0607586

[37] J. P. Gauntlett, D. Martelli, J. Sparks and D. Waldram : A new infinite class of Sasaki-

Einstein manifolds, Adv. Theor. Math. Phys. **8** (2004), no. 6, 987-1000.

[38] J. P. Gauntlett, D. Martelli, J. Sparks and S.-T. Yau : Obstructions to the existence of Sasaki-Einstein metrics, hep-th/0607080.

[39] D. Guan : On modified Mabuchi functional and Mabuchi moduli space of Kähler metrics on toric bundles, Math. Res. Letters, **6** (1999), 547-555.

[40] V. Guillemin : Kähler structures on toric varieties, J. Diff. Geom., 40 (1994), 285-309.

[41] A. D. Hwang and M. A. Singer : A moment construction for circle invariant Kähler metrics, Trans. Amer. Math. Soc. 354(2002), 2285-2325.

[42] J. Kollár, Einstein metrics on connected sums of $S^2 \times S^3$, math.DG/0402141 (2004).

[43] E. Lerman : Contact toric manifolds, J. Symplectic Geom. 1 (2003), no. 4, 785-828.

[44] E. Lerman : Homotopy groups of K-contact toric manifolds, Trans. Amer. Math. Soc., 356 (2004), no. 4, 4075-4084.

[45] A. Lichnerowicz : Géometrie des groupes de transformations, Dunod, Paris (1958).

[46] T. Mabuchi : Some symplectic geometry on compact Kähler manifolds I, Osaksa J. Math. 24 (1987), 227-252.

[47] T. Mabuchi : Extremal metrics and stabilities on polarized manifolds, Proc. ICM, Madrid, vol. 2, (2006), 813-826.

[48] D. Martelli, J. Sparks and S.-T. Yau : The geometric dual of a-maximisation for toric Sasaki-Einstein manifolds, Commun. Math. Phys. 268, 39-65 (2006)

[49] D. Martelli, J. Sparks and S.-T. Yau : Sasaki-Einstein manifolds and volume minimisation, arXiv:hep-th/0603021.

[50] Y. Matsushima : Sur la structure du groupe d'homéomorphismes d'une certaine variété kaehlérienne, Nagoya Math. J., **11**, 145-150 (1957)

[51] D. Mumford : Stability of projective varieties, L'Enseignement Mathematiques, 23(1977), 39-110.

[52] 中島啓：非線形問題と複素幾何学, 岩波講座 現代数学の展開, vol. 20, 岩波書店, (1999).

[53] T. Oota and Y. Yasui, Explicit toric metric on resolved Calabi-Yau cone, preprint, hep-th/0605129.

[54] S. Sasaki and Y. Hatakeyama : On differentiable manifolds with contact metric structures, J. Math. Soc. Japan, **14**(1962), 249-271.

[55] G. Tian : The K-energy of hypersurfaces and stability, Comm. Anal. Geom., **2**(1994), 239-265.

[56] G. Tian : Kähler-Einstein metrics with positive scalar curvature, Invent. Math., **130**, 1-37 (1997).

[57] G. Tian and X. Zhu : A new holomorphic invariant and uniqueness of Kähler-Ricci solitons, Comment. Math. Helv., 77 (2002), 297-325.

[58] C. van Coevering : Toric surfaces and Sasakian-Einstein 5-manifolds, math.DG/0607721.

[59] L.-J. Wang : Hessians of the Calabi functional and the norm function, Ann. Global Anal. Geom., 29(2006), No.2, 187-196.

[60] X.-J. Wang and X. Zhu : Kähler-Ricci solitons on toric manifolds with positive first Chern class, Adv. Math., 188 (2004), no. 1, 87-103.

[61] X.-W. Wang : Moment maps, Futaki invariant and stability of projective manifolds, Comm. Anal. Geom. 12 (2004), no. 5, 1009–1037.

[62] S.-T. Yau : On Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **74**, 1798-1799 (1977).

[63] S.-T. Yau, Open problems in Geometry, Proc. Symp. Pure Math. 54 (1993) 1-28.

(２００７年 ９月 ３日提出)

(ふたきあきと, おのはじめ・東京工業大学)