Einstein 計量と GIT 安定性

二木 昭人

日本数学会年会企画特別講演

近畿大学，２００８年３月

Hermite-Einstein 計量の存在問題（成功例）

スカラー曲率一定Kähler計量（Kähler-Einstein 計量）の存在問題（未成功）

幾何学的不変式論(Geometric Invariant Theory, GIT)

のものの考え方が役に立つ

正しい議論の方向を示唆する

正しい結論が何であるか，正しい（らしい）予想を示唆する

幾何学的不変式論(Geometric Invariant Theory, GIT)

Hausdorff 性や概代数性などの良い性質を持つモデュライ空間を構成するには半安定なものだけを集めなければならない.

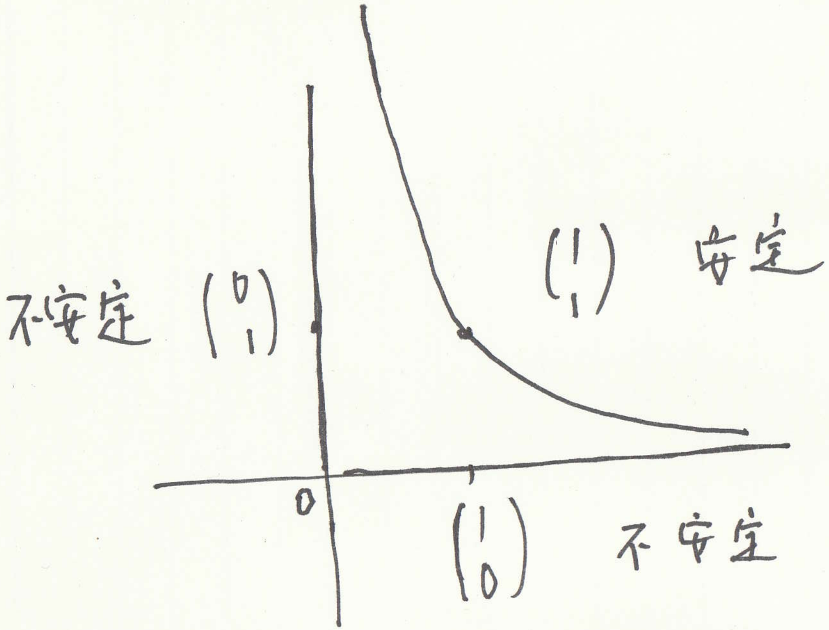
V を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とし，G を $SL(V)$ の部分群とする.

$x \in V - \{\mathbf{o}\}$ が**安定** $\overset{\text{def}}{\iff}$ 軌道 Gx が閉集合（であり，x における固定部分群が有限群である）.

$x \in V - \{\mathbf{o}\}$ が**半安定** $\overset{\text{def}}{\iff}$ 軌道 Gx の閉包が原点 $\mathbf{o}$ を含まない.

$x \in V - \{\mathbf{o}\}$ が**不安定** $\overset{\text{def}}{\iff}$ x が半安定でない.

$g \in G = \mathbb{C}^*$ $\qquad \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g^{-1} \end{pmatrix}$



$$\begin{pmatrix} g & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & g^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ 半安定

$\mathcal{O}(-1) \to \mathbb{P}(V)$:

$\ell \in \mathbb{P}(V)$ に対し直線 $\ell \subset V$ を fiber とする直線束

$\mathcal{O}(-1)$ – zero section $\cong V - \{0\}$

G-作用は$\mathcal{O}(-1)$ に lift しているとする.

$p \in \mathbb{P}(V)$ が安定 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ p 上のファイバーにある $q \in V - \{0\}$ が安定

上の状況をもっと一般化したい

$\Lambda \to Z$ を Z 上の豊富な直線束

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$\Phi : Z \to \mathbb{P}(H^0(Z, \Lambda)^*)$ が埋め込みになる.

$\Longleftrightarrow$

$c_1(\Lambda)$ が正の $(1,1)$-形式で代表される $(c_1(\Lambda) > 0)$

とする.

$G \subset \mathrm{Aut}(Z)$ は $SL(H^0(Z,\Lambda))$ に lift しているとする.

これより G-作用の Λ, Λ^{-1} への lift が定まる

$z \in Z$ が G-作用に関し**安定**

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$\Phi(z) \in \mathbb{P}(H^0(Z,\Lambda)^*)$ が G-軌道に関し安定

$\Longleftrightarrow$

z 上の fiber の点 $\hat{z} \in \Lambda^{-1}$ の G-軌道が closed (かつ finite stabilizer)

まとめ

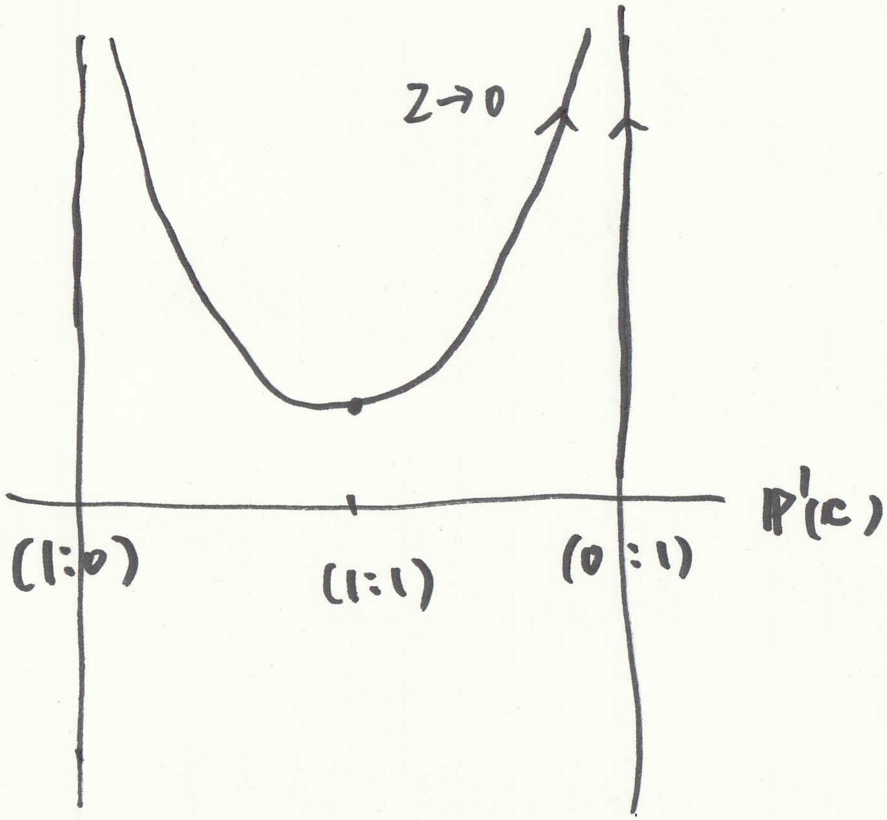
$$
\begin{tikzcd}
 & V \\
\mathcal{O}(-1) \arrow[r] & \mathbb{P}(V) \\
\Lambda^{-1} \arrow[r] & Z \arrow[u, hook, "\text{小平埋め込み}"']
\end{tikzcd}
$$

以上につき有限次元での安定性に関するよく知られた事柄を

Z：計量の空間（またはその代替物）

Λ：Z 上の直線束（楕円型作用素の族の行列式直線束）

として適用したい



$g(z) = z^{\alpha}$, $\alpha < 0 \Longleftrightarrow$ 安定

数値的判定法

Hilbert-Mumford criterion

$\alpha \longleftrightarrow$ "Futaki invariant"

安定軌道

$\Longleftrightarrow \log|z|^2$ は proper かつ 凸

$\updownarrow$

満渕 K-energy

$\log|z|$ の最小点 $\longleftrightarrow$ モーメント写像の零点

(Z, Ω) Kähler 多様体

コンパクト Lie 群 K が正則等長変換群として Z に作用しているとする.

K の複素化 $G := K^c$ は Z に正則自己同型として作用する.

$[\Omega]$ を整係数コホモロジーから来る de Rham 類とし,
正則直線束 $\Lambda \to Z$ を $c_1(\Lambda) = [\Omega]$ なるものとする.

Λ^{-1} のHermite 計量 h で,

そのHermite 接続の接続形式 θ が

$$-\frac{1}{2\pi}d\theta = \pi^*\Omega$$

を満たすものとする.

ただし $\pi : \Lambda^{-1} \to Z$ は射影である.

K^c の作用を Λ^{-1} に持ち上げるとモーメント写像

$\mu : Z \longrightarrow \mathfrak{k}^*$ が定まる:

$$\langle \mu(z), X \rangle = \theta(\tilde{X})$$

ただし $\tilde{X}$ は $X \in \mathfrak{k}$ が Λ^{-1} に誘導するベクトル場.

$X^\sharp$ は $X \in \mathfrak{k}$ が Z に誘導するベクトル場とすると

$d\langle \mu, X \rangle = i(X^\sharp)\Omega$, つまり $\langle \mu(z), X \rangle$ は Hamilton 関数.

$\mu(gz) = \mathrm{Ad}(g)^*\mu(z)$

以上のまとめ

$X^\sharp$ の Λ^{-1} への持ち上げ $\tilde{X}$ は

$$\tilde{X} = \theta(\tilde{X})\frac{\partial}{\partial\phi} + \hat{X}$$

と書ける.

ただし $\hat{X}$ は $\tilde{X}$ の水平部分, Λ^{-1} のファイバーの座標は $z = re^{i\phi}$.

G-作用を持つ $\Lambda^{-1} \to Z$ において$z \in Z$ が G-作用に関し**安定**

$\overset{\text{def}}{\iff}$

z 上の fiber の点 $\hat{z} \in \Lambda^{-1}$ の G-軌道が closed

であった.

$\Gamma = K^c \cdot z$ により $z \in Z$ を通る K^c-軌道を表し,

$\tilde{\Gamma} = K^c \cdot \hat{z}$ により $\hat{z} \in \Lambda^{-1}$ を通る K^c-軌道を表す.

$z \in Z$ が安定 $\quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \tilde{\Gamma}$ が 閉軌道

$\tilde{\Gamma}$ 上の関数 $\ell : \tilde{\Gamma} \to \mathbb{R}$ を

$$\ell(\gamma) = \log h(\gamma, \gamma)$$

により定義する.（実はこの ℓ は満渕 K-energy にあたるもの）

次のことはよく知られている

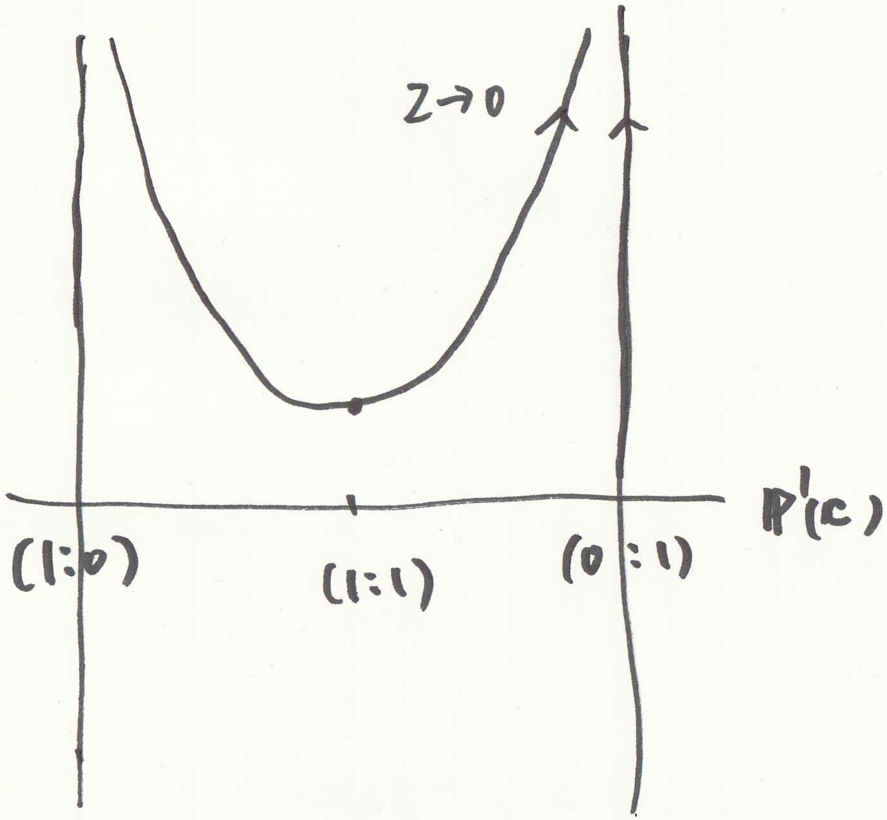
（Donaldson-Kronheimer を参照せよ）.

- ℓ は凸関数である.

- ℓ が臨界点を持つ

$\Longleftrightarrow$

モーメント写像 $\mu : Z \to \mathfrak{k}^*$ が Γ 上で零点を持つ.



$g(z) = z^{\alpha}$, $\alpha < 0 \iff$ 安定

数値的判定法

Hilbert-Mumford criterion

$\alpha \longleftrightarrow$ "Futaki invariant"

安定軌道

$\iff \log|z|^2$ は proper かつ 凸

$\updownarrow$

満渕 K-energy

$\log|z|$ の最小点 $\longleftrightarrow$ モーメント写像の零点

この2つのことから次の命題が従う.

Proposition 1

点 $z \in Z$ が K^c-作用に関し安定であるための必要十分条件はモーメント写像 μ が Γ 上で零点を持つことである.

Proposition 2 （板東-満渕の結果に対応）

モーメント写像の Γ 上の零点集合 $\{x \in \Gamma \mid \mu(x) = 0\}$ の連結成分は高々一つである．また，$\{x \in \Gamma \mid \mu(x) = 0\}$ が空でないとき，関数 ℓ は$\{p \in \tilde{\Gamma} \mid \mu(\pi(p)) = 0\}$ 上で最小値を取り，特に下から有界である.

点 $z \in Z$ を固定し，$\mu(z) : \mathfrak{k} \to \mathbb{R}$ を $\mathbb{C}$-線形に拡張したものを $\mu(z) : \mathfrak{k}^c \to \mathbb{C}$ とする.

K_z および $(K^c)_z$: K および K^c の z における固定部分群

$\mathfrak{k}_z$ および $(\mathfrak{k}^c)_z$:その Lie 環

$f_z : (\mathfrak{k}^c)_z \to \mathbb{C}$ を$\mu(z) : \mathfrak{k}^c \to \mathbb{C}$ の $(\mathfrak{k}^c)_z$ への制限とする.

$(K^c)_{gz} = g(K^c)_z g^{-1}$ であることに注意せよ.

Proposition 3 (Xiaowei Wang)

点 $z_0 \in Z$ を固定する.

このとき $z \in K^c \cdot z_0$ に対し，f_z は K^c-同変である，すなわち

$$f_{gz}(Y) = f_z(Ad(g^{-1})Y)$$

をみたす．したがって特に，もし f_z がある点 $z \in K^c \cdot z_0$ で 0 になるならば，すべての $z \in K^c \cdot z_0$ において 0 になる.

さらに $f_z : (\mathfrak{k}^c)_z \to \mathbb{C}$ は *Lie* 環準同型になる.

（実は $f_z : (\mathfrak{k}^c)_z \to \mathbb{C}$ は “Futaki invariant” にあたる）

$\mathfrak{k}$ に K-不変内積を与える.

すると同一視$\mathfrak{k} \cong \mathfrak{k}^*$ が得られ,
$\mathfrak{k}^*$ もまたK-不変内積を持つ.

$\phi(z) = |\mu(z)|^2$ とおくことにより得られる関数$\phi : K^c \cdot z_0 \to \mathbb{R}$ を考える.

ϕ の臨界点$z \in K^c \cdot z_0$ を **extremal point** と呼ぶことにする.

Proposition 4 (Xiaowei Wang)

$z \in K^c \cdot z_0$ を *extremal point* とすると，*Lie* 環の *semi-direct* 分解

$$(\mathfrak{k}^c)_z = (\mathfrak{k}_z)^c + \sum_{\lambda > 0} \mathfrak{k}^c_\lambda$$

が得られる．ここに

$\mathfrak{k}^c_\lambda$ は $\mathrm{ad}(\sqrt{-1}\mu(z))$ の λ-固有空間であり，

$\sqrt{-1}\mu(z)$ は $(\mathfrak{k}_z)^c$ の中心に属する．

特に $\mu(z) = 0$ ならば$(\mathfrak{k}_z)^c = (\mathfrak{k}^c)_z$ となる．（アブストラクト訂正のこと）

以上の結果を形式的に適用すると Kähler 多様体の幾何においてよく知られている結果を得る.

Kähler 幾何の基本事項:

コンパクト Kähler 多様体 M のKähler 計量 $g = (g_{i\bar{j}})$ に対し，そのRicci 曲率とは

$$R_{i\bar{j}} = -\frac{\partial^2}{\partial z^i \partial \overline{z}^j} \log \det g,$$

スカラー曲率 S とは

$$S = \sum_{i,j} g^{i\bar{j}} R_{i\bar{j}}.$$

ただし $(g^{i\bar{j}}) = (g_{i\bar{j}})^{-1}$.

g が**extremal Kähler 計量**とはスカラー曲率 S の勾配ベクトル場の $(1,0)$-部分

$$\mathrm{grad}^{1,0} S = \sum_{i,j=1}^{m} g^{i\bar{j}} \frac{\partial S}{\partial z^{\bar{j}}} \frac{\partial}{\partial z^i}$$

が正則ベクトル場であるときをいう.

extremal Kähler 計量は固定した Kähler 類に属する Kähler 計量全体のなす空間上の汎関数

$$g \mapsto \int_M |S|^2 dV_g$$

の臨界点である.

もしスカラー曲率が一定なら，その勾配ベクトル場は 0 であり，特に正則であるから計量は extremal Kähler 計量である.

Kähler-Einstein 計量はその Ricci 曲率

$$R_{i\bar{j}} = -\frac{\partial^2}{\partial z^i \partial \overline{z}^j} \log \det g$$

が Kähler 計量 g に比例するようなもののことである．比例定数を k とすれば

$$R_{i\bar{j}} = k g_{i\bar{j}} \tag{1}$$

と書かれ，このような計量はスカラー曲率一定であるから特にextremal Kähler 計量である．

Ricci 形式

$$\rho_g = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \sum_{i,j=1}^{m} R_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j$$

は第 1 Chern 類 $c_1(M)$ を de Rham 類として代表する.

$$R_{i\bar{j}} = k g_{i\bar{j}}$$

の k の符号に従い, $c_1(M)$ は正定値, 0 または負定値の$(1,1)$型微分形式で代表されるということになる.

これらの各々の場合を

$c_1(M) > 0$, $c_1(M) = 0$ または $c_1(M) < 0$ であると書き表す.

M が Kähler-Einstein 計量を持つための必要条件はこの 3 つの条件のいずれかが成立することである.

これの逆が正しいかという問題は,

負と 0 のときは解決されていて，正の場合が未解決である.

基本問題：与えられた Kähler 類にスカラー曲率一定 Kähler 計量が存在するのはいつか？

基本問題： $c_1 > 0$ のとき，Kähler-Einstein 計量が存在するのはいつか？

予想（Donaldson-Tian）“K-安定” のとき存在する．

基本問題：与えられた Kähler 類にスカラー曲率一定 Kähler 計量が存在するのはいつか？

基本問題： $c_1 > 0$ のとき，Kähler-Einstein 計量が存在するのはいつか？

予想（Donaldson-Tian）“K-安定” のとき存在する．

(M, ω_0, J_0) をコンパクト Kähler 多様体とする.

ただし ω_0 は Kähler 形式とし，J_0 は複素構造とする.

また，$\dim_{\mathbb{R}} M = 2m$ とする.

以下 ω_0 は固定したシンプレクティック形式とみなし，複素構造を動かすことにする.

Z を ω_0 と両立する複素構造 J の全体とする.

ここに J が ω_0 と両立するとは任意の $X,\ Y \in T_pM$ に対し

$$\omega_0(JX, JY) = \omega_0(X, Y), \quad \omega_0(X, JX) > 0$$

をみたすときをいう.

従って $J \in Z$ に対し (M, ω_0, J) は Kähler 多様体となる．このとき J における Z の接空間は $(0, 2)$ 型対称テンソル場全体 $\Gamma(Sym^2(T^{*0,1}M))$ の部分空間になり，自然な L^2-内積が Z の Kähler 構造を与える.

$$\{u \in C^\infty(M) \mid \int_M u\,\omega_0^m = 0\}$$

は ω_0 を用いた Poisson 括弧積に関し Lie 環になる.

この Lie 環を $\mathfrak{k}$ とし，その Lie 群を K とする．すなわち，K は Hamilton 微分同相で生成されるシンプレクティック微分同相群の部分群である.

K は Kähler 多様体 Z に正則かつ等長的に作用する.

Theorem 5 (藤木，Donaldson)

S_J を *Kähler* 多様体 (M, ω_0, J) のスカラー曲率とし，写像 $\mu : Z \to \mathfrak{k}^*$ を

$$< \mu(J), u > = \int_M S_J \, u \, \omega_0^m$$

により与えられるものとする（ただし $u \in \mathfrak{k}$）.

このとき μ は K の作用に関するモーメント写像となる.

この場合 K の複素化 K^c による Z への自然な作用は存在しない.

しかし，Lie 環レベルでは複素化 $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ による自然な作用は存在する.

これは Z に葉層構造を与え，Moser の定理を経由すると，
葉は固定した J_0 に関する Kähler 形式全体とみなすことができる.

この違いに目をつむり，上に述べたいくつかの命題 Z に形式的に適用すると Kähler 幾何でよく知られている以下の結果が得られることを示唆する.

関数 $\ell : \tilde{\Gamma} \to \mathbb{R}$ は**満渕 K-energy** と呼ばれる同じ Kähler 類に属する Kähler 計量全体の空間上の汎関数に相当する.

Theorem 6 (板東-満渕，Chen-Tian)
M をコンパクト *Kähler* 多様体, $[\omega_0]$ を固定した *Kähler* 類とする. このとき $[\omega_0]$ に属する定スカラー曲率 *Kähler* 計量の全体のなす空間の連結成分は高々一つである.
またこの連結成分が一つのとき，満渕 *K-energy* はこの空間上で最小値をとる.
特に，$[\omega_0]$ に属する定スカラー曲率 *Kähler* 計量 が存在すれば
満渕 *energy* は下から有界である.

点 $z \in Z$ は ω_0 と両立する複素構造であるので,

その固定部分群 K_z は Hamilton 微分同相として表される正則自己同型全体である.

$\omega \in [\omega_0]$ を任意に取る.

正則ベクトル場 X は $X = \sqrt{-1}\mathrm{grad}^{1,0} u_X$ と表されている. よって命題３により Lie 環準同型

$$f(X) := \sqrt{-1}\langle \mu(J), u_X \rangle = \sqrt{-1}\int_M u_X S_J \omega^m$$

が得られる(Futaki invariant).

スカラー曲率一定ケーラー計量が存在するための障害：

Theorem 7

M をコンパクト *Kähler* 多様体，$[\omega_0]$ を固定した *Kähler* 類とする．上により与えられる *Lie* 環準同型 f は *Kähler* 形式 $\omega \in [\omega_0]$ の取り方によらない．

また，*Kähler* 類 $[\omega_0]$ にスカラー曲率一定の *Kähler* 計量が存在するなら $f = 0$ となる．

Theorem 8 (松島，Lichnerowicz，Calabi)

M をコンパクト *extremal Kähler* 多様体とすると，*Lie* 環の *semi-direct* 分解

$$\mathfrak{h}(M) = \mathfrak{h}_0 + \sum_{\lambda>0} \mathfrak{h}_\lambda$$

が得られる．ここに $\mathfrak{h}_\lambda$ は $\mathrm{ad}(\sqrt{-1}\mathrm{grad}^{1,0}S)$ の λ-固有空間であり，$\sqrt{-1}\mathrm{grad}^{1,0}S$ は $\mathfrak{h}_0$ の中心に属する．

また，$\mathfrak{h}_0$ は簡約可能である．

漸近的 Chow 安定性との関係

- Donaldson, 満渕など：ベルグマン核を使う方法

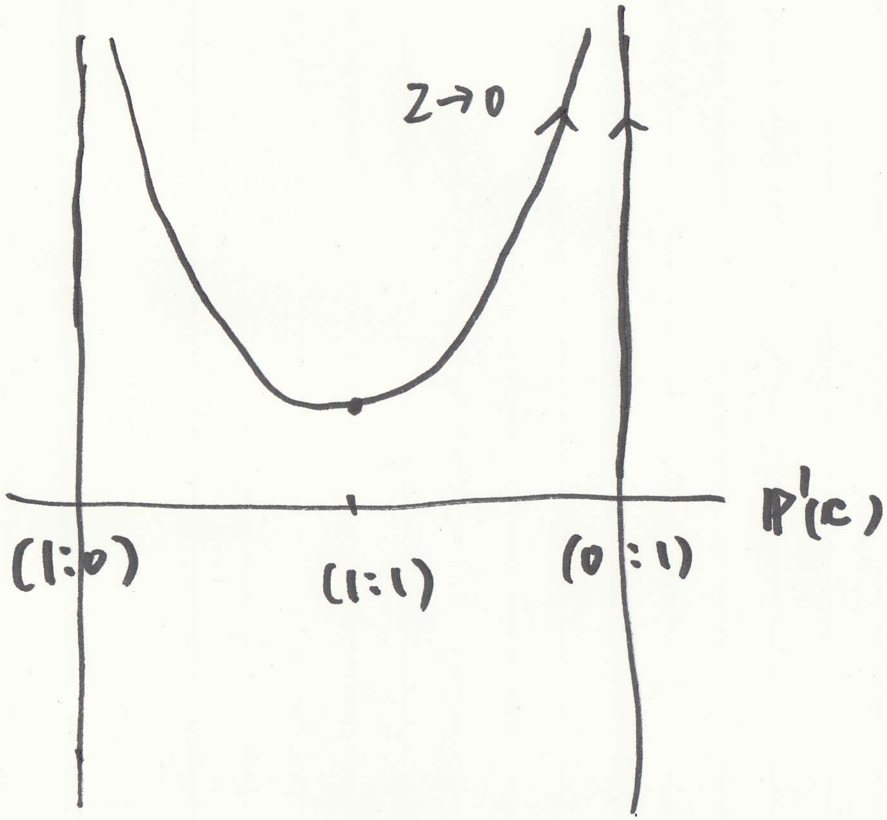
- 二木：積分不変量を見る方法

今日は省略

K 安定性（数値的判定法）

1997年のInvent. Math. に出た論文において Tian は，Fano 多様体に対し K 安定性の概念を導入し，もし Fano 多様体が Kähler-Einstein 計量を持つならばM は "弱 K 安定" であることを証明した．Tian の K 安定性は M の特異正規多様体への退化を考え，安定性を量る指数として f の定義を特異正規多様体にまで拡張した不変量を用いるものであった．

2002年にJDGに発表された論文において Donaldson は不変量 f を一般の射影スキームに代数的に定義し直し，(M, L) に対する K 安定性の概念も定義し直した．以下，Donaldson による K 安定性の定義を紹介する．



$g(z) = z^{\alpha}$, $\alpha < 0 \Longleftrightarrow$ 安定

数値的判定法

Hilbert-Mumford criterion

$\alpha \longleftrightarrow$ "Futaki invariant"

安定軌道

$\Longleftrightarrow$ $\log|z|^2$ は proper かつ 凸

$\updownarrow$

満渕 K-energy

$\log|z|$ の最小点 $\longleftrightarrow$ モーメント写像の零点

$L \to N$ を n 次元射影スキーム上の豊富な直線束とする.
L には束同型としての $\mathbb{C}^*$-作用があるとする.

このとき　$W_k = H^0(N, L^k)$ への $\mathbb{C}^*$-作用が誘導される.

$d_k = \dim W_k$,
w_k を $\wedge^{d_k} W_k$ への $\mathbb{C}^*$-作用のウェイトとする.

Riemann-Roch および同変 Riemann-Roch の定理により d_k と w_k はそれぞれ次数 n および $n+1$ の k を変数とする多項式になる.

十分大きい k に対し

$$\frac{w_k}{k d_k} = F_0 + F_1 k^{-1} + F_2 k^{-2} + \cdots$$

と展開することができる.

射影多様体 M とその上の豊富な直線束 L に対し，指数 r の**テスト配位**とは次のものからなる.

(1) スキームの族 $\pi : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$:

(2) $\mathcal{M}$ への $\mathbb{C}^*$-作用で $\mathbb{C}$ への通常の $\mathbb{C}^*$-作用を覆うもの:

(3) $\mathbb{C}^*$-同変直線束 $\mathcal{L} \to \mathcal{M}$ で次をみたすもの：

- $t \neq 0$ に対し $M_t = \pi^{-1}(t) \cong M$ かつ $(M_t, \mathcal{L}|_{M_t}) \cong (M, L^r)$,

- Hilbert 多項式 $\sum_{p=0}^{n}(-1)^p \dim H^p(M_t, L_t^r)t^p$ は t によらない. 従って特に，十分大きい r に対し $\dim H^0(M_t, L_t) = \dim H^0(M, L)$ がすべての $t \in \mathbb{C}$ に対し成立する.

この定義のもとに$\mathbb{C}^*$-作用は中心ファイバー $L_0 \to M_0 = \pi^{-1}(0)$ への $\mathbb{C}^*$-作用を誘導する．また，もし(M, L) が $\mathbb{C}^*$-作用を持てば，直積 $L \times \mathbb{C} \to M \times \mathbb{C}$ が自然にテスト配位を与える．これを**直積配位**という．直積配位において $\mathbb{C}^*$ が M に自明に作用するとき，この配位は自明な配位であるという.

Definition 9 (M, L) が **K 半安定**（または **K 安定**）であるとは，任意の自明でないテスト配位に対し中心ファイバー (M_0, L_0) の F_1 が非正（または負）であるときをいう．(M, L) が **K polystable**であるとは，(M, L) はK 半安定であり，更に等号が成立するのはテスト配位が直積配位であるときに限るときをいう.

予想(Donaldson，Tian)：(M, L) を偏極多様体とする．Kähler 類 $c_1(L)$ に定スカラー Kähler 計量が存在するための必要十分条件は (M, L) が K polystableであることであろう.

Lemma 10 F_1 の定義において，もし N が非特異射影多様体であるならば

$$F_1 = \frac{-1}{2vol(N, \omega)} f(X)$$

が成立する．ただし X は $\mathbb{C}^*$-作用の無限小生成元で，f は上で定義した *Lie* 環準同型である *(Futaki invariant)*.