Toric Sasaki-Einstein geometry

二木 昭人
(東京工業大学)

幾何学シンポジウム

鹿児島大学, 2007年8月

1 はじめに

$2m+1$ 次元リーマン多様体 (S,g) が
佐々木多様体
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$
$C(S) = S \times \mathbb{R}_+, \ \overline{g} = dr^2 + r^2 g$
により与えられる錐多様体
$(C(S), \overline{g})$ が **Kähler**.

このとき $\dim_{\mathbb{C}} C(S) = m+1$.

S が **トーリック**
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$
T^{m+1} の $C(S)$ への効果的正則等長作用がある．$(\mathbb{C}^*)^{m+1}$ も自然に作用する．

(S, g) が アインシュタイン多様体のとき
佐々木・アインシュタイン多様体という.

更にトーリックなら
トーリック佐々木・アインシュタイン多様体.

****
これまでの２つの研究の流れ：

1)　四元数ケーラー多様体に同伴する
3-佐々木多様体からの興味
（Boyer-Galicki など）

正のケーラー・アインシュタイン計量の研究
の進展，特異点のリンク
Multiplier Ideal Sheaf の応用(Boyer-Galicki-Kóllar
など) ··· regular SE

2)　AdS-CFT 対応からの興味
（Martelli-Sparks-Yau など）··· irregular SE

AdS-CFT 対応とは？

$AdS_5 \times S_5$ 上の type IIB 超弦理論と
4 次元 $N = 1$ 超共形箙ゲージ理論が対応
するという予想

ただし S_5 は５次元佐々木アインシュタイン
多様体

関連する話題

Sasaki-Einstein 多様体の構成（橋本・大田・
安井など）
anti-de Sitter Kerr black hole 解からの変形

brane tiling（植田・山崎など）
ゲージ理論の構成など

定理 (F-小野-王, 趙-F-小野)

S ：コンパクト，トーリック佐々木多様体.

S が佐々木・アインシュタイン計量を持つ

$\Longleftrightarrow$

$K_{C(S)}^{\ell}$ がある $\ell \in \mathbb{N}$ に対し自明

$\Longleftrightarrow$

S は，ある高さ $\ell \in \mathbb{N}$ のトーリック・ダイアグラムから作られる.

****
注：５次元の場合は物理学者が可算個の例を構成してあった.（Gauntlet-Martelli-Sparks-Waldrum など）

定理 (趙-F-小野)

各 $k \in \mathbb{N}$ に対し $\sharp^k(S^2 \times S^3)$ には可算無限個

の変形非同値なトーリック佐々木

アインシュタイン計量が存在する.

****

注：トーリックでない場合は Boyer, Galicki, Nakamaye, Kóllar らにより知られていた.

注：k が odd の場合は van Coevering が別の方法で構成していた.

定理（趙-F-小野） (S, g) をコンパクト,

トーリック佐々木・アインシュタイン多様体とする.

このとき横断正則構造の自己同型群の単位元を含む連結成分が

g と同じ Reeb 場を持つ佐々木・アインシュタイン計量全体の空間に

推移的に作用する.

****

（板東-満渕の一意性定理の佐々木版）

定理（F)

トーリック Fano 多様体 M の標準直線束 K_M

には完備リッチ・平坦 Kähler 計量が存在.

****

この定理は Eguchi-Hanson 計量（$M = \mathbb{CP}^1$）,
Calabi の計量（$M = \mathbb{CP}^m$, ）の拡張である.

****

定理（F)

トーリック Fano 多様体 M に対し,

K_M − zero section には

スカラー曲率 0 の完備 Kähler 計量が存在.

2 佐々木多様体

(S, g) : (2m+1) 次元**佐々木多様体**
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$
$C(S) = S \times \mathbb{R}_+$, $\overline{g} = dr^2 + r^2 g$ とする
錐多様体 $(C(S), \overline{g})$ が **Kähler**.
$(\dim_{\mathbb{C}} C(S) = m + 1)$

$S \cong \{r = 1\}$ と同一視.

$\widetilde{\xi} = J(r\frac{\partial}{\partial r})$,
$\xi = J(r\frac{\partial}{\partial r})|_{r=1}$: **Reeb ベクトル場**.
ξ の生成する S 上の flow ：**Reeb 流**.

$\widetilde{\xi} - iJ\widetilde{\xi}$ は $C(S)$ 上の正則 flow を生成

$\widetilde{\xi} - iJ\widetilde{\xi}$ on $C(S)$ の正則 flow の局所軌道空間
$= \xi$ の Reeb 流の局所軌道空間

よって Reeb 流 $\mathcal{F}_\xi$ on S は **横断正則構造** を持つ.

ξ の 双対 1-form η はS の接触形式.
つまり Ker $\eta \cong \nu(F_\xi)$ 上非退化

$d\eta$ は $\mathcal{F}_\xi$ に **横断 Kähler 構造**を与える.
つまり F_ξ の局所軌道空間に Kähler 構造を与える.

η は $C(S)$ の 1-form $\widetilde{\eta}$ に lift.

$d\widetilde{\eta} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\partial\overline{\partial}r^2$ は Kähler form on $C(S)$.

典型例 :
$(C(S), S, \text{leaf space}) = (\mathbb{C}^{m+1}-\{0\}, S^{2m+1}, \mathbb{CP}^m)$.

簡単な曲率の計算により

$C(S)$ Ricci-flat Kähler
$\Longleftrightarrow$ S is Einstein
$\Longleftrightarrow$ local leaf spaces are positive Kähler-Einstein.

F-小野-王:
Kähler geometry のほとんどは
佐々木多様体の横断 Kähler geometry に拡張.
e.g. ”Futaki invariant”, ”Mabuchi K-energy”
など

滑らかな微分形式 α on S が **basic** if

$$i(\xi)\alpha = 0 \quad \text{and} \quad \mathcal{L}_\xi \alpha = 0.$$

$\Omega_B^{p,q}$ = “basic (p,q)-forms”

$$\partial_B : \Omega_B^{p,q} \to \Omega_B^{p+1,q}, \quad \overline{\partial}_B : \Omega_B^{p,q} \to \Omega_B^{p,q+1}.$$

$H_B^{p,q}(S)$: (p,q) 型 basic コホモロジー群

横断正則構造の Chern-Weil 理論:

$c_1^B(\nu(\mathcal{F}_\xi)) \in H_B^{1,1}(S)$: **basic first Chern class**.

where
$\nu(\mathcal{F}_\xi)$ = Reeb foliation F_ξ の法束.

佐々木・アインシュタイン多様体の場合,

横断 Kähler 形式を $\omega^T := \frac{1}{2}d\eta$ とすると

$$(2m+2)[\omega^T] = c_1^B(\nu(\mathcal{F}_\xi)).$$

命題 $c_1^B(\nu(\mathcal{F}_\xi)) = (2m+2)[\omega^T]$ の形
$\Longleftrightarrow$
$c_1(D) = 0$ かつ $c_1^B > 0$. ただし $D = \mathrm{Ker}\ \eta$.

定義 佐々木計量 g が
横断 Kähler-Ricci ソリトンとは

$$\rho^T - \omega^T = L_X \omega^T$$

ただし ρ^T は ω^T の Ricci 形式,

X は "Hamilton 正則ベクトル場".

もし二木不変量が消える
$\Longrightarrow$
Kähler-Ricci ソリトンはKähler-Einstein 計量（$X = 0$）．

佐々木の横断 Kähler 幾何でも同様.

定理 (F-小野-王)
S をコンパクト，トーリック佐々木多様体で
$c_1^B > 0$ かつ $c_1(D) = 0$ とすると，
横断 Kähler-Ricci ソリトンが存在する.

(Kähler case by X.-J. Wang and X.-H. Zhu.)

更に Reeb ベクトル場 ξ を傾けていくと，
佐々木版二木不変量が消えるようにできる.

(Z-minimization or a-maximization in AdS-CFT correspondence by Martelli-Saprks-Yau)

以上から次を得る.

定理 (F-小野-王)
S をコンパクト，トーリック佐々木多様体で
$c_1^B > 0$ かつ $c_1(D) = 0$ とすると，
佐々木構造を変形することにより
佐々木・アインシュタイン計量を得る.

例 :
$M = \mathbb{CP}^2$ の 1 点または 2 点 blow-up
$S = K_M$ の同伴 S^1-束
S は佐々木・アインシュタイン計量を持つ.

$c_1^B > 0$ かつ $c_1(D) = 0$ とはどのような条件か？

定理(趙-F-小野) S コンパクト, トーリック佐々木多様体で $\dim S \geq 5$ とする.

$C(S)$ を頂点を含めた解析空間と見たとき次の 3 つは同値である.

(a) $c_1^B > 0$ かつ $c_1(D) = 0$.

(b) ある $\ell \in \mathbb{N}$ に対し $K_{C(S)}^{\ell}$ は自明.
特に頂点は $\mathbb{Q}$-Gorenstein singularity.

(c) 佐々木多様体 S はある高さ $\ell \in \mathbb{N}$ のトーリック・ダイアグラムから作られる.

****

$G = T^{m+1}$. $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$.
$\mathfrak{g}^*$ the dual of $\mathfrak{g}$.
$\mathbb{Z}_{\mathfrak{g}}$ を $\mathfrak{g}$ の格子とする,
i.e. kernel of $\exp : \mathfrak{g} \to G$.

定義 :
(1) $C \subset \mathfrak{g}^*$ が **rational convex polyhedral cone**
$\Longleftrightarrow$
a finite set of vectors $\lambda_i \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{g}}$,
$1 \leq i \leq d$, such that

$$C = \{y \in \mathfrak{g}^* \mid \langle y, \lambda_i \rangle \geq 0 \text{ for } \ i = 1, \cdots, d\}.$$

(2) 空でない内部をもつ rational polyhedral cone が **good**
$\Longleftrightarrow$
ある $\{i_1, \cdots, i_k\} \subset \{1, \cdots, d\}$ に対し

$$\{y \in C \mid \langle y, \lambda_{i_j} \rangle = 0 \text{ for all } j = 1, \cdots, k\}$$

が空でない C の面ならば $\lambda_{i_1}, \cdots, \lambda_{i_k}$ は
$\mathbb{Z}$ 上１次独立で,

$$\{\sum_{j=1}^{k} a_j \lambda_{i_j} \mid a_j \in \mathbb{R}\} \cap \mathbb{Z}_{\mathfrak{g}}$$
$$= \{\sum_{j=1}^{k} m_j \lambda_{i_j} \mid m_j \in \mathbb{Z}\}$$

をみたす.

定義 : 高さ ℓ の $(m+1)$-次元トーリック・ダイアグラムとは

good rational convex polyhedral cone を与える $\lambda_i \in \mathbb{Z}^{m+1} \cong \mathbb{Z}_{\mathfrak{g}}$ と

$$\gamma = (\frac{a_0}{b_0}, \cdots, \frac{a_m}{b_m}) \in \mathbb{Q}^{m+1} \cong (\mathbb{Q}_{\mathfrak{g}})^*$$

の集まりで次をみたすもの：

(a) $a_i \in \mathbb{Z}$ と $b_i \in \mathbb{Z}_+$ は互いに素;

(b) $b_0, \cdots, b_m$ の最小公倍数は ℓ;

(c) $\langle \gamma, \lambda_i \rangle = -1$.

good rational polyhedral cone C に対し上の (a), (b) and (c) をみたす有理ベクトルγ が存在するとき，C は高さ ℓ のトーリック・ダイアグラムであるという.

“height ℓ” という用語を使う理由：
$SL(m+1,\mathbb{Z})$ の適当な元を用いて変換して

$$\gamma = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\ell} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

という形にできるが，このとき各 λ_i は

$$\lambda_j = \begin{pmatrix} \ell \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Fact

$$C_0^* = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \langle v, \xi \rangle > 0 \text{ for all } v \in C\}$$

とおく.
good rational polyhedral cone C と
$\xi \in C_0^*$ に対し,
モーメント像が $C\backslash\{0\}$ になり,
Reeb ベクトル場が ξ になるような
トーリック佐々木多様体がに存在.
（計量の取り方に ambiguity が残る）

Delzant 構成，Abreu-Guillemin 議論を用いると
(a) $c_1^B > 0$ かつ $c_1(D) = 0 \Longrightarrow$
(c) S は高さ ℓ のトーリック・ダイアグラムから得られる．
$\Longrightarrow$ (b) $K_{C(S)}^{\otimes \ell}$ は正則切断を持つ.
$\Longrightarrow$ (a) $c_1^B > 0$ かつ $c_1(D) = 0$.

$\mathcal{L}$ を $\lambda_1, \cdots, \lambda_d$ により生成される $\mathbb{Z}_{\mathfrak{g}}$ の部分群とすると，

$$\pi_1(S) \cong \mathbb{Z}_{\mathfrak{g}}/\mathcal{L}.$$

$\ell > 1$ なら $\mathbb{Z}_{\mathfrak{g}}/\mathcal{L} \neq \{0\}$

定理 S を高さ $\ell > 1$ のトーリック・ダイアグラムに同伴する連結なトーリック佐々木多様体とすると，S は単連結でない．

逆は正しくない.

例：

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

このとき $\pi_1(S) = \mathbb{Z}_5$.