

# TORIC SASAKI-EINSTEIN GEOMETRY

二木 昭人

## 1. はじめに

まず、佐々木多様体などの定義を述べよう。

**定義 1.1.**  $2m+1$  次元リーマン多様体  $(S, g)$  が佐々木多様体 であるとは  $C(S) = S \times \mathbb{R}_+$ ,  $\bar{g} = dr^2 + r^2g$  により与えられる錐多様体  $(C(S), \bar{g})$  が Kähler であるときを言う。

このとき  $\dim_{\mathbb{C}} C(S) = m+1$  である。

**定義 1.2.** 佐々木多様体  $S$  が トーリック であるとは  $m+1$  次元トーラス  $G \cong T^{m+1}$  の  $C(S)$  への効果的正則等長作用があるときをいう。このとき  $(\mathbb{C}^*)^{m+1}$  も  $C(S)$  に自然に作用する、

**定義 1.3.** 佐々木多様体  $(S, g)$  がアインシュタイン多様体のとき 佐々木・アインシュタイン多様体 という。更にトーリックでもあるとき トーリック佐々木・アインシュタイン多様体 という。

佐々木多様体は接触多様体であり、接触形式は

$$\eta = (2d^c \log r)|_{\{r=1\}}$$

で与えられる。ここに  $S \cong \{r=1\}$  と同一視する。この接触構造の Reeb 場 を  $\xi$  により表すと、

$$\xi = J \frac{\partial}{\partial r}$$

で与えられる。Reeb 場が  $S^1$ -作用を生成するとき佐々木構造は quasi-regular であると言われ、Reeb 場が  $S^1$ -作用を生成しないとき佐々木構造は irregular であると言われる。佐々木構造が与えられると Reeb 場  $\xi$  の生成する flow の局所軌道空間にケーラー構造が定まる。これを佐々木多様体の横断ケーラー構造という。要するに、佐々木構造とは局所軌道空間の横断ケーラー構造と  $C(S)$  のケーラー構造に挟まれた接触構造のことである。

これまでの研究の流れとして、Boyer と Galicki を中心とした数学者サイドからの研究と AdS/CFT 対応の研究を通しての物理学者サイドからの研究がある。Boyer と Galicki は四元数ケーラー多様体に同伴する 3-佐々木多様体への興味から一般の佐々木多様体への興味を広げ、特異点のリンクの微分トポロジーの良く知られた結果などを活用しながら佐々木・アインシュタイン計量の構成についての目覚ましい成果をあげた ([2], [3])。Boyer-Galicki の仕事で得られるものは Fano orbifold  $X$  上の  $S^1$ -束という形の佐々木多様体  $S$  である。この場合、 $S$  が佐々木・アインシュタイン多様体であることと、Fano orbifold  $X$  が 正の Ricci 曲率を持つ orbifold Kähler-Einstein 多様体あることは同値である。従って、問題は  $X$  に 正の Ricci 曲率を持つ orbifold Kähler-Einstein 計量を与える問題に帰着される。このような問題はケーラー幾何に

Date: July 11, 2007 .

において GIT 安定性との関係で活発に研究され、現在でも最終決着には至っていない。しかし、いくつかの存在を証明する方法が知られている。Boyer-Galicki および K ollar の方法は Nadel の multiplier ideal sheaf, およびその Demailly-K ollar による改良を用いるものである。

もう一つの研究の流れは AdS-CFT 対応から来るものである。AdS-CFT 対応とは 5 次元 anti de Sitter 空間  $AdS_5$  と 5 次元佐々木・アインシュタイン多様体  $S_5$  の直積  $AdS_5 \times S_5$  上の type IIB 超弦理論と 4 次元  $N = 1$  superconformal quiver ゲージ理論が対応するという予想で、両方の理論の対応する量が一致することを見ることによりこの予想を検証するために佐々木・アインシュタイン計量を求める必要があった。実際物理学者によりごく最近、5 次元トーリック佐々木・アインシュタイン計量がたくさん explicit に求められている。これらは高さ 1 のトーリック・ダイアグラムから作られる 5 次元佐々木多様体上に存在するもので、 $Y^{p,q}$  ([13], [17]),  $L^{p,q,r}$  ([9], [17]),  $X^{p,q}$  ([14]),  $Z^{p,q}$  ([20], [1]) という記号で表されるものである。これらはほとんどが irregular な佐々木構造を持つ。また、これらの構成は anti de Sitter Kerr black hole 解の変形として得られるもので、モンジュ・アンペール方程式を解いて存在を証明する Boyer-Galicki 達の方法とは全く異なる。

この他、関連する話題として brane tiling(植田一石・山崎雅人 [22]) などもある。

## 2. トーリック佐々木・アインシュタイン多様体

我々の得た結果は以下のように述べられる。定理 2.1 は第 3 節の定理 3.4, 3.5 をひとまとめにしたものである。

**定理 2.1** (F-小野-王 [12], 趙-F-小野 [8]).  $S$  をコンパクト、トーリック佐々木多様体とする。 $S$  が佐々木・アインシュタイン計量を持つための必要十分条件は、ある  $\ell \in \mathbb{N}$  に対し  $K_{C(S)}^\ell$  が自明であることである。このことは  $S$  が、ある高さ  $\ell \in \mathbb{N}$  のトーリック・ダイアグラム (定義 3.3 参照) から作られることとも同値である。

5 次元の場合は物理学者が可算個の例を構成してあったことは第 1 節で述べた通りである。一意性について述べるために用語を準備しよう。

佐々木多様体  $(S, g)$  が与えられたとき、別の佐々木計量  $g'$  が  $(S, g)$  の佐々木構造と両立するとは  $g$  と  $g'$  が同じ Reeb ベクトル場を持ち、従って同じ横断正則構造を持つときをいう。また、横断正則構造の自己同型群とは  $C(S)$  の正則自己同型で  $\tilde{\xi} - iJ\tilde{\xi}$  の生成する正則 flow と可換なもの全体のなす群である。ただし  $\tilde{\xi} = J(r\partial/\partial r)$  とする。このような自己同型群は Reeb 葉層の横断正則構造を保つ  $S$  への作用を誘導する。

**定理 2.2** (趙-F-小野 [8]).  $(S, g)$  をコンパクト、トーリック佐々木・アインシュタイン多様体とする。このとき横断正則構造の自己同型群の単位元を含む連結成分が  $g$  と両立する佐々木・アインシュタイン計量全体の空間に推移的に作用する。

定理 2.1 の直接的応用として次を得る。

**定理 2.3** (趙-F-小野 [8]). 各  $k \in \mathbb{N}$  に対し、 $S^2 \times S^3$  の  $k$  個の連結和  $k(S^2 \times S^3)$  には可算無限個の変形非同値なトーリック佐々木アインシュタイン計量が存在する。

この結果のトーリックでない場合は Boyer, Galicki, Nakamaye, K ollar らにより知られていた ([5], [4], [16])。また、トーリックの場合でも  $k$  が odd の場合は van Coevering [23] が別の方法で構成している。

また、定理 2.1 の別の応用として以下を得る。

定理 2.4 ([11]). トーリック Fano 多様体  $M$  の標準直線束  $K_M$  の全空間には完備リッチ平坦 Kähler 計量が存在する .

この定理は Eguchi-Hanson 計量 ( $M = \mathbb{C}P^1$ , [10]), Calabi の計量 ( $M = \mathbb{C}P^m$ , [7]) の拡張である . また,  $M$  が  $\mathbb{C}P^2$  の 1 点 blow-up の場合の完備スカラー平坦 Kähler 計量は Oota-Yasui [21] により全く違う方法で得られているが, 定理 2.1 と [21] の計量が一致するかどうかは筆者は知らない .

定理 2.5 ([11]). トーリック Fano 多様体  $M$  の標準直線束  $K_M$  の全空間から零切断を除いた空間にはスカラー曲率 0 の完備 Kähler 計量が存在する .

定理 2.4, 2.5 の証明はモーメント構成 (c.f. [15]) を  $\eta$ -Einstein 佐々木多様体に対して適用して得られる .

### 3. 横断ケーラー幾何

$\tilde{\xi} = J(r \frac{\partial}{\partial r})$  とおくと  $\tilde{\xi} - iJ\tilde{\xi}$  は  $C(S)$  上の正則ベクトル場になる .  $\tilde{\xi}$  を  $S \cong \{r = 1\}$  に制限すると  $S$  のベクトル場であるが, これを  $S$  の Reeb ベクトル場と呼び,  $\xi$  により表すのであった . Reeb ベクトル場  $\xi$  は Killing ベクトル場でもあり, 従って  $S$  の等長変換群トーラス部分群を生成する .

$\eta$  をリーマン計量  $g$  に関する  $\xi$  の dual 1-form とする . このとき  $\eta$  は

$$\eta = (i(\bar{\partial} - \partial) \log r)|_{r=1} = (2d^c \log r)|_{r=1}$$

により表される .  $D = \text{Ker } \eta$  とおき, これを 接触束とよぶ . . . このとき  $d\eta$  は  $D$  上非退化であり, したがって  $S$  は  $\eta$  を接触形式とする接触多様体になる . Reeb ベクトル場  $\xi$  は

$$i(\xi)\eta = 1 \quad \text{and} \quad i(\xi)d\eta = 0$$

をみtas . ここに  $i(\xi)$  は内部積である . Reeb ベクトル場  $\xi$  は  $S$  の 1-次元葉層  $\mathcal{F}_\xi$  を与える . これを Reeb 葉層と呼ぶ . Reeb 葉層と  $\tilde{\xi} - iJ\tilde{\xi}$  が生成する  $C(S)$  上の正則 flow は同じ局所軌道空間を持つ . 後者は自然な横断正則構造を持つので, Reeb 葉層も横断正則構造を持つ .  $\mathcal{F}_\xi$  の局所軌道空間の接空間は自然に  $D$  のファイバーと同型になるので,  $\frac{1}{2}d\eta$  が  $D$  のシンプレクティック形式を与えることを考慮すると,  $\mathcal{F}_\xi$  の局所軌道空間の well-defined Kähler 形式を得る . Kähler 形式は各局所軌道空間上定義されているが, これらは  $S$  に引き戻されると  $S$  の大域的な 2-form

$$(1) \quad \omega^T = \frac{1}{2}d\eta = d(d^c \log r|_{r=1}) = (dd^c \log r)|_{r=1}$$

になる . これを横断 Kähler 形式とよぶ .  $\mathcal{F}_\xi$  の局所 Kähler 構造の集まりを横断 Kähler 構造とよぶ .

$S$  上の微分形式  $\alpha$  が basic であるとは

$$i(\xi)\alpha = 0 \quad \text{and} \quad \mathcal{L}_\xi \alpha = 0$$

となるときをいう . ここに  $\mathcal{L}_\xi$  は  $\xi$  による Lie 微分を表す . basic form は外微分  $d$  で保たれ,  $d = \partial_B + \bar{\partial}_B$  の形に分解するので, basic コホモロジー群および basic Dolbeault コホモロジー群が定義できる . 更に, 横断 Chern-Weil 理論も構成でき, basic 変換関数をもつベクトル束に対し basic Chern 類を定義することも出来る . Kähler の場合と同様, Reeb 葉層の法束  $\nu(\mathcal{F}_\xi)$  の basic 第 1 Chern 類  $c_1^B(\nu(\mathcal{F}_\xi))$  は横断 Ricci 形式

$$(2) \quad \rho^T = -i\partial_B \bar{\partial}_B \log \det(g_{i\bar{j}}^T)$$

の  $1/2\pi$  倍で代表される．ただし  $z^1, \dots, z^m$  局所軌道空間の正則座標とするととき横断 Kähler 形式は

$$\omega^T = i g_{i\bar{j}}^T dz^i \wedge d\bar{z}^{\bar{j}}$$

と表わされるとする．

次に佐々木・アインシュタイン多様体について考察する．まず，次の事実が知られている．

**命題 3.1.**  $(S, g)$  を  $(2m+1)$ -次元佐々木多様体とする．次の 3 つの条件は同値である．

- (a)  $(S, g)$  は佐々木・アインシュタイン多様体である．このとき *Einstein* 定数は  $2m$  となる．
- (b)  $(C(S), \bar{g})$  は *Ricci* 平坦 *Kähler* 多様体である．
- (c) *Reeb* 葉層の局所軌道空間は *Einstein* 定数  $2m+2$  の横断 *Kähler-Einstein* 計量を持つ．

この証明は [2] または [3] を見よ．命題 3.1 の典型的例は  $(C(S), S)$  局所軌道空間が  $(\mathbb{C}^{m+1} - \{0\}, S^{2m+1}, \mathbb{C}\mathbb{P}^m)$  のときである．ただし， $S^{2m+1}$  は単位球面である．

$S$  が *Einstein* 計量を持つならば命題 3.1 の (c) により，

$$(3) \quad \rho^T = (2m+2)\omega^T = (m+1)d\eta$$

が成り立つ．よって  $c_1^B(\nu(\mathcal{F}_\xi)) > 0$ , i.e.  $c_1^B(\nu(\mathcal{F}_\xi))$  は正の basic  $(1,1)$ -form で代表される．このとき basic コホモロジー群から通常のコホモロジー群への自然な準同型  $H_B^2(\mathcal{F}_\xi) \rightarrow H^2(S)$  のもとに basic 第 1 Chern 類  $c_1^B(\nu(\mathcal{F}_\xi))$  は通常のコホモロジー群  $H^2(S)$  の第 1 Chern 類  $c_1(D)$  に写される．しかし (3) により

$$(4) \quad c_1(D) = (2m+2)\omega^T = (m+1)[d\eta] = 0$$

である．逆に  $c_1^B(\nu(\mathcal{F}_\xi)) > 0$  かつ  $c_1(D) = 0$  ならばある定数  $\tau > 0$  に対し  $c_1^B = \tau[d\eta]$  となる．この証明は [12] の Proposition 4.3 を見よ．

*Kähler* 錐多様体  $(C(S), \bar{g})$  がトーリックのとき佐々木多様体  $(S, g)$  はトーリックであるというのであった．すなわち  $(m+1)$ -次元トーラス  $G \cong T^{m+1}$  が  $(C(S), \bar{g})$  に正則等長写像として効果的に作用する． $G$  は  $r$  と複素構造  $J$  を不変にするので  $\xi$  も不変にする． $\xi$  の生成する flow は  $C(S)$  に正則等長変換として作用するが， $G$  はすでにトーラス作用として作用できる最大次元になっているので  $\xi$  は  $G$  の Lie 環  $\mathfrak{g}$  に入っていないといけない．したがって， $G$  の  $C(S)$  への作用は自然に  $S$  への作用を誘導する．

**定義 3.2.**  $(m+1)$ -次元トーラス  $G$  の Lie 環  $\mathfrak{g}$  の双対空間を  $\mathfrak{g}^*$  とする． $\mathbb{Z}_{\mathfrak{g}}$  を  $\mathfrak{g}$  の格子点全体とする．すなわち  $\mathbb{Z}_{\mathfrak{g}}$  は指数写像  $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$  の核である． $\mathfrak{g}^*$  の部分集合  $C$  が有理凸多面錐であるとは有限個のベクトル  $\lambda_i \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{g}}$ ,  $1 \leq i \leq d$ , が存在して

$$C = \{y \in \mathfrak{g}^* \mid \langle y, \lambda_i \rangle \geq 0 \text{ for } i = 1, \dots, d\}$$

と表されるときを言う．集合  $\lambda_i$  は任意の  $j$  に対し

$$C \neq \{y \in \mathfrak{g}^* \mid \langle y, \lambda_i \rangle \geq 0 \text{ for all } i \neq j\}$$

が成立するという意味で極小であると仮定する．また，各  $\lambda_i$  は原始的，つまり  $\lambda_i$  は整数  $a \geq 2$  と  $\mu \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{g}}$  を用いて  $\lambda_i = a\mu$  という形に表すことはできないと仮定する（従って， $C$  が空でない内部を持つとき  $d$  は余次元 1 の面の個数に等しい．）これらの 2 つの仮定の下に空でない内部を持つ有理凸多面錐が “good” であるとは以下の条件をみたすときである．

もしある  $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, d\}$  に対し

$$\{y \in C \mid \langle y, \lambda_{i_j} \rangle = 0 \text{ for all } j = 1, \dots, k\}$$

が  $C$  の空でない面であるならば,  $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k}$  は  $\mathbb{Z}$  上 1 次独立であり,

$$(5) \quad \left\{ \sum_{j=1}^k a_j \lambda_{i_j} \mid a_j \in \mathbb{R} \right\} \cap \mathbb{Z}_{\mathfrak{g}} = \left\{ \sum_{j=1}^k m_j \lambda_{i_j} \mid m_j \in \mathbb{Z} \right\}$$

をみたす.

good な有理凸多面錐  $C$  が与えられると滑らかなトーリック接触多様体でそのモーメント像が  $C$  になるものが構成される (good という条件は滑らかという条件を言い表している.)

**定義 3.3.** 高さ  $\ell$  の  $(m+1)$ -次元トーリック・ダイアグラムとは, (5) をみたす  $\lambda_i \in \mathbb{Z}^{m+1} \cong \mathbb{Z}_{\mathfrak{g}}$  と  $\gamma \in \mathbb{Q}^{m+1} \cong (\mathbb{Q}_{\mathfrak{g}})^*$  の集まりで, 次の 2 つの条件を満たすものである.

- (1)  $\ell$  は自然数で,  $\ell\gamma$  が格子  $\mathbb{Z}^{m+1} \cong \mathbb{Z}_{\mathfrak{g}}^*$  の原始的元になるもの.
- (2)  $\langle \gamma, \lambda_i \rangle = -1$ .

good な有理凸多面錐  $C$  が高さ  $\ell$  のトーリック・ダイアグラムから定まるとは, 上の 2 条件 (1) と (2) をみたすような有理ベクトル  $\gamma$  が存在するときをいう.

“height  $\ell$ ” という用語を使う理由は,  $SL(m+1, \mathbb{Z})$  の適当な元を用いて変換して

$$\gamma = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\ell} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

という形にできるが, このとき各  $\lambda_i$  の第 1 成分は一斉に  $\ell$  になる, つまり  $\lambda_i$  は一斉に高さ  $\ell$  になるからである. 次の定理は定義 3.3 の高さ一定という条件は  $C(S)$  の Calabi-Yau 条件であるということを主張する.

**定理 3.4** ([8]).  $S$  をコンパクト, トーリック佐々木多様体とし,  $\dim S \geq 5$  とする. このとき次の 3 つの条件は同値である.

- (a)  $c_1^B > 0$  かつ  $c_1(D) = 0$ .
- (b)  $S$  は  $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathfrak{g}$  と  $\gamma \in \mathfrak{g}^*$  により与えられる高さ  $\ell \in \mathbb{N}$  のトーリック・ダイアグラムから定まり, Reeb 場  $\xi \in \mathfrak{g}$  は

$$\langle \gamma, \xi \rangle = -m - 1 \quad \text{and} \quad \langle y, \xi \rangle > 0 \quad \text{for all } y \in C$$

をみたす. ここに  $C = \{y \in \mathfrak{g}^* \mid \langle y, \lambda_j \rangle \geq 0, j = 1, \dots, d\}$  である.

- (c) ある自然数  $\ell$  に対し, 標準束  $K_{C(S)}$  の  $\ell$  次の冪  $K_{C(S)}^{\otimes \ell}$  は自明である.

論文 [12] の主定理は次の通りである.

**定理 3.5** ([12]).  $S$  を定理 3.4 に述べられた 3 つの同値な条件をみたすコンパクト, トーリック佐々木多様体とする. よって basic コホモロジー類として  $c_1^B = (2m+2)[\omega^T]$  が成立していると仮定してよい. このとき, Reeb ベクトル場を変形し, さらに横断 Kähler 計量を変形することにより, 佐々木・アインシュタイン計量を構成することができる.

定理 3.5 の証明の概略は次の通りである．Reeb ベクトル場を一つ固定すると横断正則構造が固定される．定理 3.5 の証明の第一ステップは，固定した横断正則構造に対し，横断 Kähler 形式を滑らかな basic 関数  $\psi_1$  を用いて

$$(6) \quad \omega^T + dd^c \psi_1 = d(d^c(\log r + \psi_1)|_{r=1}) = \frac{1}{2} d((d^c \log(r^2 \exp(2\psi_1)))|_{r=1})$$

の形で変形して，変形された横断 Kähler 計量が Kähler Ricci ソリトン方程式

$$\rho^T - (2m + 2)\omega^T = \mathcal{L}_X \omega$$

をみたすようにできることを証明することである．ただし  $X$  は [12] の意味での“Hamiltonian 正則ベクトル場”である．横断 Kähler-Ricci ソリトンはいわゆる佐々木多様体版の二木不変量 ([6]) が消えれば正の横断 Kähler-Einstein 計量になる．つまり  $X = 0$  になる．佐々木多様体版二木不変量は Reeb ベクトル場のみに依存する（つまり横断正則構造のみに依存する）ことに注意して欲しい．

定理 3.5 の証明の第二ステップは佐々木多様体版二木不変量が消えるような Reeb ベクトル場  $\xi'$  がただ一つ存在することを証明することである．このことのアイデアは Martelli-Sparks-Yau [18], [19] による．第一ステップによりこの  $\xi'$  に対し正の Kähler-Einstein 計量，すなわち佐々木・アインシュタイン計量が存在する．

以上が定理 3.5 の証明の概略であるが，第二ステップについてもう少し，解説を加えたい．佐々木多様体版二木不変量が消えるような Reeb ベクトル場  $\xi'$  を見つけるには佐々木多様体の体積の変分問題を考える．トーリック佐々木多様体の体積は Reeb ベクトル場のみに依存してきまるので，体積汎関数の gradient も Reeb ベクトル場にしか依存しない．実はこの gradient が佐々木多様体版二木不変量になっている．さらに第 2 変分を計算すると体積汎関数は凸関数であること，Reeb 場の動く領域（定理 3.4, (b) 参照）の境界に近づくと  $+\infty$  に発散することも容易にわかるので，体積汎関数の臨界点が一意的に存在することがわかる．この臨界点が佐々木多様体版二木不変量が消える Reeb 場を定める．

最後に，定理 2.4, 2.5 はより一般的な以下の定理の特別な場合であることを述べておく．

定理 3.6.  $M$  をト・リック Fano 多様体とし， $L$  をある自然数  $p$  に対し  $K_M = L^{\otimes p}$  となるような正則直線束とする．このとき，各自然数  $k$  に対し， $L^{\otimes k}$  の全空間に完備スカラー平坦 Kähler 計量が存在する．この計量は  $k = p$  のとき，Ricci 平坦である．

定理 3.7.  $S$  をコンパクト佐々木・アインシュタイン多様体， $C(S)$  をその Kähler 錐多様体とする．このとき以下が成立する．

- (a)  $C(S)$  には完備スカラー平坦 Kähler 計量が存在する．
- (b) 任意の負の定数  $c$  に対してある  $\gamma > 0$  が存在して， $C(S)$  の部分多様体  $\{0 < r < \gamma\}$  はスカラー曲率が恒等的に  $c$  に等しい完備 Kähler 計量が存在する．

従って特に，高さ一定のトーリック・ダイアグラムから作られるトーリック Kähler 錐  $C(S)$  は完備スカラー平坦 Kähler 計量を持つ．

## REFERENCES

- [1] R. Argurio, M. Bertolini, C. Closset and S. Cremonesi, On Stable Non-Supersymmetric Vacua at the Bottom of Cascading Theories, arXiv:hep-th/0606175.
- [2] C.P. Boyer and K. Galicki : 3-Sasakian manifolds, Surveys Diff. Geom., 7 (1999), pp. 123-184.

- [3] C.P. Boyer and K. Galicki : Sasakian Geometry, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, Oxford, 2007.
- [4] C. P. Boyer, K. Galicki, and J. Kollár, Einstein metrics on spheres, *Ann. of Math.*,162 (2005), no. 1, 557-580.
- [5] C. P. Boyer, K. Galicki, and M. Nakamaye : On the geometry of Sasakian-Einstein 5-manifolds, *Math. Ann.* 325 (2003), no. 3, 485-524.
- [6] C.P. Boyer, K. Galicki and S.R. Simanca, Canonical Sasakian metrics, preprint, math.DG/0604325.
- [7] E. Calabi : Métriques Kähleriennes et fibrés holomorphes, *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 12(1979), 268-294.
- [8] K. Cho, A. Futaki and H. Ono : Uniqueness and examples of toric Sasaki-Einstein manifolds, to appear in *Communications in Mathematical Physics*, math.DG/0701122.
- [9] M. Cvetic, H. Lü, D. N. Page and C. N. Pope, New Einstein-Sasaki Spaces in Five and Higher Dimensions, *Phys. Rev. Lett.* 95 (2005) 071101 (hep-th/0504225).
- [10] T. Eguchi and A. J. Hanson : Self-dual solutions to Euclidean gravity, *Ann. of Phys.*, 120 (1979), 82-106.
- [11] A. Futaki : Complete Ricci-flat Kähler metrics on the canonical bundles of toric Fano manifolds, math.DG/0703138
- [12] A. Futaki, H. Ono and G. Wang : Transverse Kähler geometry of Sasaki manifolds and toric Sasaki-Einstein manifolds, math.DG/0607586.
- [13] J. P. Gauntlett, D. Martelli, J. Sparks and D. Waldram, Sasaki-Einstein Metrics on  $S^2 \times S^3$ , *Adv. Theor. Math. Phys.* 8 (2004) 711–734 (hep-th/0403002).
- [14] A. Hanany, P. Kazakopoulos and B. Wecht, A New Infinite Class of Quiver Gauge Theories, hep-th/0503177
- [15] A. D. Hwang and M. A. Singer : A moment construction for circle invariant Kähler metrics, *Trans. Amer. Math. Soc.* 354(2002), 2285-2325.
- [16] J. Kollár, Einstein metrics on connected sums of  $S^2 \times S^3$ , math.DG/0402141 (2004).
- [17] D. Martelli and J. Sparks, Toric Sasaki-Einstein metrics on  $S^2 \times S^3$ , *Phys. Lett. B* 621(2005) 208–212 (hep-th/0505027).
- [18] D. Martelli, J. Sparks and S.-T. Yau : The geometric dual of a-maximisation for toric Sasaki-Einstein manifolds, *Commun. Math. Phys.* 268, 39-65 (2006). (hep-th/0503183).
- [19] D. Martelli, J. Sparks and S.-T. Yau : Sasaki-Einstein manifolds and volume minimisation, arXiv:hep-th/0603021.
- [20] T. Oota and Y. Yasui : New Example of Infinite Family of Quiver Gauge Theories, arXiv:hep-th/0610092.
- [21] T. Oota and Y. Yasui, Explicit toric metric on resolved Calabi-Yau cone, preprint, hep-th/0605129.
- [22] K. Ueda and M.Yamazaki : Homological mirror symmetry for toric orbifolds of toric del Pezzo surfaces, arXiv:math/0703267
- [23] C. van Coevering : Toric surfaces and Sasakian-Einstein 5-manifolds, math.DG/0607721.

東京工業大学理工学研究科数学専攻

*E-mail address:* futaki@math.titech.ac.jp