行列の冪乗とその応用

高木 俊輔（東京大学大学院数理科学研究科）

1. 行列の基礎事項

この節では，次節以降で使う行列の基礎事項を駆け足で説明する．行列についてご存知の方は，この節は読み飛ばして次節に進んでください．

定義 1. n 次**実正方行列**とは，n^2 個の実数 $a_{11}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, \ldots, a_{2n}, a_{31}, \ldots, a_{nn}$ を次のように正方形状に配置したものである．

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(1) 上の行列を A とおいたとき，a_{ij} を A の (i,j) **成分**, $(a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots\ a_{in})$ を A の第 i **行ベクトル**, $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ を A の第 j **列ベクトル**という．

(2) A と n 次元縦ベクトル $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ の積 $A\boldsymbol{b}$ を次のように定義する：

$$A\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \cdots + a_{1n}b_n \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \cdots + a_{2n}b_n \\ \vdots \\ a_{n1}b_1 + a_{n2}b_2 + \cdots + a_{nn}b_n \end{pmatrix}.$$

定義 2. A を n 次実正方行列とする．$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ となる零でない n 次元縦ベクトル $\boldsymbol{v}$ が存在するとき，λ を A の**固有値**という．またこのとき，$\boldsymbol{v}$ を λ に属する A の**固有ベクトル**という．

例 3. $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値は3と4である．実際，$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと，$A\boldsymbol{v}_1 = 4\boldsymbol{v}_1, A\boldsymbol{v}_2 = 3\boldsymbol{v}_2$ が成り立つ．

例 4. 固有値は実数とは限らない．例えば，$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値は $\pm\sqrt{-1}$ である．実際，$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{-1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{-1} \end{pmatrix}$ とおくと，$B\boldsymbol{u}_1 = \sqrt{-1}\boldsymbol{u}_1, B\boldsymbol{u}_2 = -\sqrt{-1}\boldsymbol{u}_2$ が成り立つ．

命題 5. A を n 次実正方行列としたとき，任意の $1 \leq i, j \leq n$ について A の (i,j) 成分と (j,i) 成分を入れかえた n 次実正方行列を A の**転置行列**といい，${}^tA$ と表す．${}^tA$ の固有値は A の固有値と等しい．

例 6. $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ のとき，${}^tA = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ であり，${}^tA$ の固有値は 3 と 4 である．

実際，$\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ とおくと，$A\boldsymbol{w}_1 = 4\boldsymbol{w}_1, A\boldsymbol{w}_2 = 3\boldsymbol{w}_2$ が成り立つ．

定義 7.

n 次実正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$ の

積 AB は n 次実正方行列で，第 j 列ベクトルが A と B の第 j 列ベクトル

$\boldsymbol{b}_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$ の積 $A\boldsymbol{b}_j$ であるものと定義する．つまり，$AB = (A\boldsymbol{b}_1\ A\boldsymbol{b}_2\ \ldots\ A\boldsymbol{b}_n)$

である．m 個の A の積 $\underbrace{AA\cdots A}_{m\text{ 個}}$ を A^m と表す．

例 8. 2 次実正方行列の積は次のように書ける．

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

2. 有限状態マルコフ連鎖

問. 某村には F, L2 つのコンビニがあり，村人は全員どちらかのコンビニを毎日利用している（同じ日に両方の店に行く人はいないとする）．F の客の 6 割は翌日も F を利用し，残り 4 割は翌日 L を利用する．L の客の 9 割は翌日も L を利用し，残り 1 割は翌日 F を利用する．このとき，長期的にみると，村の人口の何割が L を利用するようになるか？

この問題を固有ベクトルを使って解いてみよう．最初に記号を用意する．

$$p_1^{(0)} = \frac{\text{初日の } F \text{ の客数}}{\text{村の人口}}, \quad p_2^{(0)} = \frac{\text{初日の } L \text{ の客数}}{\text{村の人口}}, \quad \boldsymbol{p}^{(0)} = \begin{pmatrix} p_1^{(0)} \\ p_2^{(0)} \end{pmatrix},$$

$$p_1^{(m)} = \frac{m\ \text{日後の}\ F\ \text{の客数}}{\text{村の人口}},\quad p_2^{(m)} = \frac{m\ \text{日後の}\ L\ \text{の客数}}{\text{村の人口}},\quad \boldsymbol{p}^{(m)} = \begin{pmatrix} p_1^{(m)} \\ p_2^{(m)} \end{pmatrix},$$

さらに $A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.1 \\ 0.4 & 0.9 \end{pmatrix}$ とおく．仮定から $0.6p_1^{(m)} + 0.1p_2^{(m)} = p_1^{(m+1)}, 0.4p_1^{(m)} + 0.9p_2^{(m)} = p_2^{(m+1)}$ が成り立つ．この条件を行列を使って表すと，

$$A\boldsymbol{p}^{(m)} = \boldsymbol{p}^{(m+1)}$$

となる．上の式を繰り返し適用することにより，

$$\boldsymbol{p}^{(m)} = A^m \boldsymbol{p}^{(0)}$$

を得る．そこで $\displaystyle\lim_{m\to\infty} A^m \boldsymbol{p}^{(0)}$ を計算する．より一般に $0 < \alpha, \beta < 1$ とし，

$$A_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \beta \\ \alpha & 1-\beta \end{pmatrix}$$

とおく（$A = A_{0.4,0.1}$ である）．このとき，$A_{\alpha,\beta}$ の固有値は 1 と $1-\alpha-\beta$ である．実際，

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} \beta/(\alpha+\beta) \\ \alpha/(\alpha+\beta) \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

とおくと，$A_{\alpha,\beta}\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_1, A_{\alpha,\beta}\boldsymbol{v}_2 = (1-\alpha-\beta)\boldsymbol{v}_2$ が成り立つ．$\boldsymbol{p}^{(0)}$ は

$$\boldsymbol{p}^{(0)} = \begin{pmatrix} p_1^{(0)} \\ p_2^{(0)} \end{pmatrix} = \boldsymbol{v}_1 + \left(p_1^{(0)} - \frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\boldsymbol{v}_2$$

と $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ の線形和で書けるので，$|1-\alpha-\beta| < 1$ に注意すると，

$$\begin{aligned} A_{\alpha,\beta}^m \boldsymbol{p}^{(0)} &= A_{\alpha,\beta}^m \boldsymbol{v}_1 + \left(p_1^{(0)} - \frac{\beta}{\alpha+\beta}\right) A_{\alpha,\beta}^m \boldsymbol{v}_2 \\ &= \boldsymbol{v}_1 + \left(p_1^{(0)} - \frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)(1-\alpha-\beta)^m \boldsymbol{v}_2 \to \boldsymbol{v}_1\ (m\to\infty) \end{aligned}$$

となる．つまり，$\boldsymbol{p}^{(0)}$ に関係なく，$\displaystyle\lim_{m\to\infty} A_{\alpha,\beta}^m \boldsymbol{p}^{(0)}$ は $\boldsymbol{v}_1$ に収束する．問は $\alpha = 0.4, \beta = 0.1$ の場合だったので，

$$\lim_{m\to\infty} A^m \boldsymbol{p}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.1/(0.4+0.1) \\ 0.4/(0.4+0.1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

となる．つまり，長期的には村の人口の約2割が F を利用し，残り8割は L を利用する．

次の節では，A が n 次実正方行列のとき，いつ $\displaystyle\lim_{m\to\infty} A^m \boldsymbol{p}^{(0)}$ が $\boldsymbol{p}^{(0)}$ に関係なく収束するか議論する．

3. ペロン・フロベニウスの定理

この節では，ペロン・フロベニウスの定理について説明する．

定義 9. A を n 次実正方行列とする．

(1) A のすべての成分が非負実数であるとき，A を**非負行列**という．

(2) A を非負行列とする．任意の $1 \leq i, j \leq n$ に対し，A^m の (i,j) 成分が非零になるような自然数 m が存在するとき，A は **既約行列**であるという．

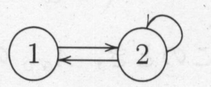
n 次正方行列 A が与えられたとき，A に付随する有向グラフ[1] G_A を次のように定義する．

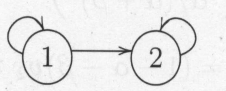
(i) G_A は 異なる n 個の頂点を持つとし，各頂点に 1 から n まで番号をつける．

(ii) A の (i,j) 成分が零でないとき，i から j に矢印を引く．

命題 10. 有向グラフ上の任意の 2 頂点 i, j に対し，i から j に向かう矢印の列が存在するとき，そのグラフは**強連結**であるという．非負行列 A が既約であることは，A の有向グラフ G_A が強連結であることと同値である．

例 11.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，G_A は  である．

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，G_B は  である．

G_A は強連結なので，A は既約である．一方，G_B には 2 から 1 に向かう矢印がないので，G_B は強連結ではない．実際，任意の自然数 n に対し $B^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であり，$(2,1)$ 成分は常に零なので，B は既約ではない．

定理 12 (ペロン・フロベニウスの定理). A を非負かつ既約な正方行列とする．このとき，次の条件を満たす A の固有値 λ_{pf} と その固有ベクトル $\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}}$ が存在する．

(1) λ_{pf} は正の実数である．

(2) A の任意の固有値 λ に対し[a]，$|\lambda| \leq \lambda_{\mathrm{pf}}$ である．

(3) $\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}}$ の成分はすべて正の実数であり，その和は 1 である．

(4) λ_{pf} に属する固有ベクトルは $\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}}$ のスカラー倍に限られる．

λ_{pf} を A の**ペロン・フロベニウス固有値**，$\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}}$ を A の**ペロン・フロベニウス固有ベクトル**という．

[a] λ は実数とは限らないことに注意する．

以下では，A が確率行列と呼ばれる特別な実正方行列の場合を考える．

[1] **有向グラフ**とは，頂点と矢印（向きがついた辺）からなる図形のことである．

定義 13. n 次実正方行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

は，各 a_{ij} が 0 以上 1 以下の実数で，任意の $i = 1, \ldots, n$ に対し $a_{1i} + a_{2i} + \cdots + a_{ni} = 1$ が成り立つとき，**確率行列**であるという．

確率行列は常に 1 を固有値に持つ．実際 A を確率行列とすると，$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ に対し ${}^tA\mathbf{1} = \mathbf{1}$ が成り立つ．よって 1 は ${}^tA$ の固有値なので，命題 5 より A の固有値でもある．

定義 14. A は非負正方行列とする．A^m のすべての成分が正となるような自然数 m が存在するとき，A は**原始的**であるという．

原始性は既約性より強い条件である．例えば，$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ は既約だが，原始的ではない．§2 の $A_{\alpha,\beta}$ は原始的な確率行列である．ペロン・フロベニウスの定理を原始的な確率行列に適用することにより，§2 の結果が n 次正方行列の場合に拡張される．

定理 15. A を 既約な確率行列とすると，A にペロン・フロベニウスの定理を適用することができ，次が成り立つ．

(1) $\lambda_{\mathrm{pf}} = 1$ である．

(2) より強く，A は原始的であると仮定する．このとき A の任意の固有値 λ に対し，$|\lambda| < \lambda_{\mathrm{pf}}$ である．さらに $||\boldsymbol{p}^{(0)}||_1 = 1$ となる任意の n 次元実ベクトル $\boldsymbol{p}^{(0)}$ に対し，

$$\lim_{m\to\infty} A^m \boldsymbol{p}^{(0)} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}}$$

が成り立つ．ただし，n 次元実ベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ に対し，

$||\boldsymbol{v}||_1 = |v_1| + \cdots + |v_n|$ と定義する．

定理 15 を使って，§2 の問より少し複雑な問題を考えてみよう．

問． 某村には F, L, S3 つのコンビニがあり，村人は全員いずれかのコンビニを毎日利用している（同じ日に複数の店に行く人はいないとする）．F の客の 8 割は翌日も F を利用し，1 割は翌日 L を，残り 1 割は S を利用する．L の客の 7 割は翌日も L を利用し，2 割は翌日 F を，残り 1 割は S を利用する．S の客の 6 割は翌日も S を利用し，2 割は翌日 F を，残り 2 割は L を利用する．このとき，長期的にみると，村の人口の何割が L を利用するようになるか？

§2 と同様，次のように行列 A とベクトル $\boldsymbol{p}^{(m)}$ を定義する．

$$p_1^{(0)} = \frac{\text{初日の } F \text{ の客数}}{\text{村の人口}},\ p_2^{(0)} = \frac{\text{初日の } L \text{ の客数}}{\text{村の人口}},\ p_3^{(0)} = \frac{\text{初日の } S \text{ の客数}}{\text{村の人口}}$$

$$p_1^{(m)} = \frac{m \text{ 日後 の } F \text{ の客数}}{\text{村の人口}},\ p_2^{(m)} = \frac{m \text{ 日後 の } L \text{ の客数}}{\text{村の人口}},\ p_3^{(m)} = \frac{m \text{ 日後の } S \text{ の客数}}{\text{村の人口}}$$

$$\boldsymbol{p}^{(0)} = \begin{pmatrix} p_1^{(0)} \\ p_2^{(0)} \\ p_3^{(0)} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}^{(m)} = \begin{pmatrix} p_1^{(m)} \\ p_2^{(m)} \\ p_3^{(m)} \end{pmatrix},\quad A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$$

このとき，$\boldsymbol{p}^{(m)} = A^m \boldsymbol{p}^{(0)}$ が成り立つので，$\lim_{m\to\infty} A^m \boldsymbol{p}^{(0)}$ を計算する．A は原始的な確率行列なので，定理 15 から $\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}}$ を求めればよい．$\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}}$ は固有値 1 に属する固有ベクトルなので，$A\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}}$ を満たす．$\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ とおくと，定理 12 の (3) の条件と合わせて，

$$\begin{cases} v_1 = 0.8v_1 + 0.2v_2 + 0.2v_3 \\ v_2 = 0.1v_1 + 0.7v_2 + 0.2v_3 \\ v_3 = 0.1v_1 + 0.1v_2 + 0.6v_3 \\ 1 = v_1 + v_2 + v_3 \end{cases}$$

という連立一次方程式の解が $\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}}$ である．この連立一次方程式をガウスの消去法で解くと，$\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.3 \\ 0.2 \end{pmatrix}$ を得る．従って，長期的には村の人口の約 5 割が F を，約 3 割が L を利用し，残り 2 割は S を利用する．

4. ページランク

前節の結果の応用として，Google の検索エンジンに使用されている，「ページランク」と呼ばれるウェブページの重要度を測るアルゴリズムについて解説する．本節の内容については，[1], [2] を参考にした[2]．

設定．ウェブ上に n 個の異なるページが存在するとし，各ページに 1 から n まで番号をつける．ページ j に対し

$$L(j) := \{1 \leq i \leq n \mid j \text{ から } i \text{ にリンクが張られている}\}$$

という集合を考え，$L(j)$ の要素の数を ℓ_j とおく．簡単のため，次を仮定する．

- 自分自身にはリンクを張らない．つまり，任意の $1 \leq j \leq n$ に対し $j \notin L(j)$.
- 少なくとも 1 つのページにはリンクを張る．つまり，任意の $1 \leq j \leq n$ に対し $L(j) \neq \emptyset$.

リンクの相関関係は，次のような有向グラフ D で表すことができる．

(i) D は異なる n 個の頂点を持つとし，各頂点に 1 から n まで番号をつける．
(ii) ページ i から ページ j にリンクが張られているとき，頂点 i から頂点 j に矢印を引く．

[2] [2] は大変わかりやすい教科書で，物理志望の方は勿論のこと，それ以外の方にもお勧めです．

基本原理. 獲得ポイント数が多いほどランクが高くなる.

(1) より多くのページからリンクが張られるほど，獲得ポイント数は多い.
(2) よりランクの高いページからリンクを張られるほど，獲得ポイント数は多い.
(3) よりリンク先を厳選しているページからリンクを張られるほど，獲得ポイント数は多い.

目標. 基本原理を反映するように，ページ i のポイント数 r_i を

$$(\star) \qquad r_i = \sum_{i \in L(j)} \frac{r_j}{\ell_j} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

を満たすように定めたい.

疑問. (1) $(\star)$ を満たす $r_1, \ldots, r_n$ は存在するか？
(2) $(\star)$ を満たす正の実数 $r_1, \ldots, r_n$ は（定数倍を除いて）唯一つか？

任意の $1 \leq i, j \leq n$ に対し

$$L_{ij} = \begin{cases} 1/\ell_j & (j \text{ から } i \text{ にリンクが張られている，つまり } i \in L(j)) \\ 0 & (j \text{ から } i \text{ にリンクが張られていない，つまり } i \notin L(j)) \end{cases}$$

とし，n 次正方行列 L を次のように定義する.

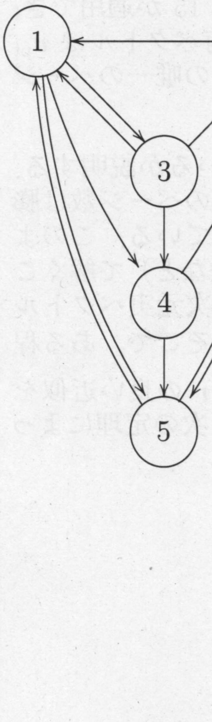
$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1n} \\ L_{21} & L_{22} & \cdots & L_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1} & L_{n2} & \cdots & L_{nn} \end{pmatrix}$$

任意の $j = 1, \ldots, n$ に対し

$$L_{1j} + L_{2j} + \cdots + L_{nj} = (L(j) \text{ の要素の数}) \times (1/\ell_j) = 1$$

なので，L は非負確率行列である.

例 16.



のとき，$L = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/3 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ である.

上の目標は行列 L を使うと，次のように表される．

定義 17. $r_1, \ldots, r_n$ が $(\star)$ を満たすことは，ベクトル $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$ が

$$(\star\star) \qquad L\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}$$

を満たすこととと同値である．このような $\boldsymbol{r}$ のうち，すべての成分が正でその和が 1 であるものを L の**ページランクベクトル**という．

ページランクベクトルが唯一つ存在すれば，疑問 (1), (2) は解決する．

例 18. 例 16 の場合，ページランクベクトルは $\dfrac{1}{96}\begin{pmatrix} 27 \\ 22 \\ 9 \\ 12 \\ 26 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.281 \\ 0.229 \\ 0.094 \\ 0.125 \\ 0.271 \end{pmatrix}$ 唯一つである．

従って，ページをランクの高い順に並べると，$1 > 5 > 2 > 4 > 3$ となる．

確率行列は 1 を固有値に持つので，$(\star\star)$ を満たす零でないベクトル $\boldsymbol{r}$ が存在する．従って，疑問 (1) は解決した．L にペロン・フロベニウス定理（定理 12）を適用できれば，疑問 (2) も解決するが，L は既約とは限らない（有向グラフ D は強連結とは限らない）．そこでペロン・フロベニウスの定理が適用できるように，L を修正する．L の代わりに，

$$G_\alpha = \alpha L + \frac{1-\alpha}{n}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \qquad (0 \le \alpha < 1)$$

という n 次正方行列 G_α を考える．G_α は原始的な確率行列なので，定理 15 が適用でき，$\lambda_{\mathrm{pf}} = 1$ である．定理 12 (3), (4) より，G_α の固有値 $\lambda_{\mathrm{pf}} = 1$ に属する固有ベクトルは $\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}}$ のスカラー倍に限られ，$\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}}$ の成分はすべて正である．従って $\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}}$ が G_α の唯一のページランクベクトルであり，疑問 (2) も解決した．

最後に Google がどのように G_α のページランクベクトルを計算しているか説明する．$(\star)$ は $r_1, \ldots, r_n$ を変数とする n 元連立一次方程式とみなせる．ウェブ上のページ数は膨大であり，Google が実際に使用している行列の次数 n は 250 億と言われている．このように n が巨大な場合，n 元連立一次方程式を通常の方法（ガウスの消去法など）で解くことは極めて困難である．一方定理 15 より，$\|\boldsymbol{r}^{(0)}\|_1 = 1$ となる任意の n 次元実ベクトル $\boldsymbol{r}^{(0)}$ に対して，$\boldsymbol{r} = \lim_{m\to\infty} G_\alpha^m \boldsymbol{r}^{(0)}$ は G_α のページランクベクトルになる．そこで，ある程度大きい m に対して $G_\alpha^m \boldsymbol{r}^{(0)}$ を計算することで，ページランクベクトル $\boldsymbol{r}$ の良い近似を得ることを考える（このような連立一次方程式の解法を**冪乗法**という）．次の定理によって，$G_\alpha^m \boldsymbol{r}^{(0)}$ と $\boldsymbol{r}$ の差は α^m に比例して小さくなることがわかる．

定理 19.

$$||G_\alpha^m \boldsymbol{r}^{(0)} - \boldsymbol{r}||_1 \leq \alpha^m ||\boldsymbol{r}^{(0)} - \boldsymbol{r}||_1 \leq 2\alpha^m.$$

ただし，定理 15 と同じように，n 次元実ベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ に対し，

$||\boldsymbol{v}||_1 = |v_1| + \cdots + |v_n|$ と定義する．

α を小さくしすぎると，基本原理を反映しないランク付けになってしまう．しかし α を 1 に近づけすぎると，ページランクベクトルの良い近似を得るための計算量が大きくなりすぎてしまう．Google は，$\alpha = 0.85$ としてページランクの計算を行なっている．この場合，ページランクベクトルの良い近似を得るためには，m の大きさは 50〜100 くらいとする必要があるということである（つまり，250 億次正方行列の 50〜100 乗を計算する必要がある）[3]．

ここまで読まれてページランクに興味を持たれたら，是非原論文 [1] にあたって欲しい．英語で書かれているものの，内容は平易である．

参考文献

[1] L. Page, S. Brin, R. Motwani and T. Winograd, The PageRank Citation Ranking: Bringing Order to the Web, Technical Report, Stanford InfoLab (1999).

[2] 田崎晴明: 数学 −物理を学び楽しむために−，http://www.gakushuin.ac.jp/~881791/mathbook/ からダウンロード可能

[3] 100 億 $= 10^{10}$ に対し，$(0.85)^{50} \approx 3 \times 10^{-4}, (0.85)^{100} \approx 9 \times 10^{-8}$ である．