行列と整数論

東京大学大学院数理科学研究科
三枝 洋一

1　連分数

以下のように，分数の分母にまた分数が入っているような式を**連分数**といいます．

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{4}{5}}}$$

これの値を求めるには，

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{4}{5}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{5}{19}}=1+\frac{19}{43}=\frac{62}{43}$$

というふうに，右下の方から順番に計算していきます．

また，

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\ddots}}}}$$

のように，無限に続く連分数（**無限連分数**）を考えることもできます．これは，

$$1,\quad 1+\frac{1}{2},\quad 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}},\quad 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}},\quad 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}},\quad \ldots$$

という数列の極限という意味です．この数列が収束することについては当然証明する必要があるのですが，ここでは，ある値 x に収束することを認めて，x を求めてみることにしましょう．

$$\frac{1}{x-1}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\ddots}}}=1+x$$

の分母を払うことで $x^2-1=1$ すなわち $x^2=2$ となるので，$x>0$ と合わせて $x=\sqrt{2}$ が分かります．つまり，

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\ddots}}}}$$

ということです．このように，無限連分数の値として無理数が出てくることがあります．ここでは説明できませんが，円周率 π は次のような無限連分数で表せることが知られています．

$$\pi=3+\cfrac{1^2}{6+\cfrac{3^2}{6+\cfrac{5^2}{6+\cfrac{7^2}{6+\cfrac{9^2}{\ddots}}}}}$$

2　連分数と行列

前節で見たように，有限連分数

$$a_0+\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{\ddots+\cfrac{b_{n-1}}{a_{n-1}+\cfrac{b_n}{a_n+x}}}}}$$

は次のような手順によって計算されます．

(1) x に a_n を加える．

(2) (1) の答えの逆数をとる．

(3) (2) の答えに b_n をかける．

(4) (3) の答えに a_{n-1} を加える．（以下繰り返し）

なお，(1) から (3) をまとめて行うと，「x を $\dfrac{b_n}{a_n+x}$ にうつす」という操作になり，これを n 回繰り返して最後に a_0 を加えることで連分数が計算できると見ることもできます．

上で出てきた，「ある数を加える」「ある数をかける」「逆数をとる」「それらの組み合わせ」を全てまとめて考えたものが，以下で定義する一次分数変換です．

定義 2.1

a, b, c, d を 4 つの数とするとき，x を $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ にうつす操作を**一次分数変換**という（分母が 0 になる可能性は心配すべきだが，ここでは気にしないことにする）．

4 つの数 a, b, c, d を与えることは 2×2 行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を与えることと同じなので，より詳しく，x を $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ にうつす操作を行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対応する一次分数変換と呼ぶ．$\dfrac{ax+b}{cx+d}$ のことを $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}x$ とも書く．

例 2.2

(1) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対応する一次分数変換は，x を $\dfrac{1x+b}{0x+1} = x+b$ にうつす操作，すなわち，x に b を加えるという操作である．

(2) 行列 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対応する一次分数変換は，x を $\dfrac{ax+0}{0x+1} = ax$ にうつす操作，すなわち，x に a をかけるという操作である．

(3) 行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対応する一次分数変換は，x を $\dfrac{0x+1}{1x+0} = \dfrac{1}{x}$ にうつす操作，すなわち，x の逆数をとるという操作である．

次の命題が示すように，一次分数変換の合成はまた一次分数変換になり，対応する行列はもとの行列の積になります．

命題 2.3

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ を 2×2 行列とするとき，B に対応する一次分数変換を行った後に A に対応する一次分数変換を行った結果は，AB に対応する一次分数変換を行った結果と一致する．すなわち，$A(Bx) = (AB)x$ が成り立つ．

証明　行列の積は，$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$ と定義されているのだった．これより，

$$
\begin{aligned}
A(Bx) &= A\left(\frac{px+q}{rx+s}\right) = \frac{a\frac{px+q}{rx+s}+b}{c\frac{px+q}{rx+s}+d} = \frac{a(px+q)+b(rx+s)}{c(px+q)+d(rx+s)} = \frac{(ap+br)x+(aq+bs)}{(cp+dr)x+(cq+ds)} \\
&= \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix} x = (AB)x
\end{aligned}
$$

となるので，主張が確かめられた．　■

有限連分数の計算のときに現れた操作

(1) a_n を加える　(2) 逆数をとる　(3) b_n をかける

はそれぞれ

$$
\begin{pmatrix} 1 & a_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

という行列に対応する一次分数変換でした（例 2.2 参照）．これらの積（順序に注意！）は

$$
\begin{pmatrix} b_n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b_n \\ 1 & a_n \end{pmatrix}
$$

となり，(1), (2), (3) をこの順に続けて行うことによって得られる「x を $\dfrac{b_n}{x+a_n}$ に対応させる」という一次分数変換に対応した行列が出てきます．

以上の考察をまとめることで，有限連分数は以下のように行列の積を用いて計算できることが分かりました．

$$a_0+\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{\ddots+\cfrac{b_{n-1}}{a_{n-1}+\cfrac{b_n}{a_n+x}}}}}=\begin{pmatrix}1 & a_0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & b_1\\ 1 & a_1\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}0 & b_n\\ 1 & a_n\end{pmatrix}x$$

（一番左の行列 $\begin{pmatrix}1 & a_0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ は，「最後に a_0 を加える」という操作に対応しています．）特に $x=0$ とすれば，

$$a_0+\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{\ddots+\cfrac{b_{n-1}}{a_{n-1}+\cfrac{b_n}{a_n}}}}}=\begin{pmatrix}1 & a_0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & b_1\\ 1 & a_1\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}0 & b_n\\ 1 & a_n\end{pmatrix}0$$

が分かります．つまり，

$$\begin{pmatrix}1 & a_0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & b_1\\ 1 & a_1\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}0 & b_n\\ 1 & a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix}$$

と計算しておいて，比 $\dfrac{q}{s}$ をとれば連分数の値が求まるということです．

例 2.4

(1) 冒頭の例

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{4}{5}}}$$

に適用してみよう．この場合は，行列の積

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 4\\ 1 & 5\end{pmatrix}$$

に対応している．この積を計算すると $\begin{pmatrix}10 & 62\\ 7 & 43\end{pmatrix}$ となるので，上記の連分数の値は $\dfrac{62}{43}$ である．

(2) 円周率の無限連分数による表示

$$\pi=3+\cfrac{1^2}{6+\cfrac{3^2}{6+\cfrac{5^2}{6+\cfrac{7^2}{6+\cfrac{9^2}{\ddots}}}}}$$

に対応するのは，

$$\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1^2\\1&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&3^2\\1&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&5^2\\1&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&7^2\\1&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&9^2\\1&6\end{pmatrix}\cdots$$

という「行列の無限積」である．これを 6 項で打ち切ったものをコンピュータで計算すると，

$$\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1^2\\1&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&3^2\\1&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&5^2\\1&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&7^2\\1&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&9^2\\1&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14835&196011\\4725&62370\end{pmatrix}$$

となるが，これの $(1,2)$ 成分と $(2,2)$ 成分の比は

$$\frac{196011}{62370}=3.14271\cdots$$

となり，確かに円周率と近い値になっている．

3 ペル方程式

今度は，$\sqrt{2}$ の無限連分数による表示

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\ddots}}}}$$

に注目してみましょう．

$$\sqrt{2}-1=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\ddots}}}}$$

を右辺の入れ子になっている部分に代入することで，以下のように無数の等式を得ることができます．

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)},\quad \sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}},\quad \sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}}},$$

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}}}},\quad \cdots$$

4 つ目の式の右辺を計算してみましょう．行列を使うと，これは

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\sqrt{2}=\begin{pmatrix}17&24\\12&17\end{pmatrix}\sqrt{2}=\frac{17\sqrt{2}+24}{12\sqrt{2}+17}$$

と計算できます．分母に $\sqrt{2}$ をかけると分子になるので，確かに $\sqrt{2}=\dfrac{17\sqrt{2}+24}{12\sqrt{2}+17}$ となっていますね．

ここで分母に現れた 12, 17 という 2 つの数は，$17^2-2\times12^2=289-288=1$ という関係を満たしています．つまり，$(x,y)=(17,12)$ は方程式 $x^2-2y^2=1$ の整数解となっています．これは偶然なのでしょうか？実は，次が成り立つのです．

定理 3.1

$\sqrt{2}$ の無限連分数による表示から得られる n 番目の等式の右辺を，分母の有理化を行わずに計算した結果を $\dfrac{p_n\sqrt{2}+q_n}{r_n\sqrt{2}+s_n}$ と書くと，$(x,y)=(s_n,r_n)$ は方程式 $x^2-2y^2=(-1)^n$ の整数解を与える．

この定理を証明する際には，**行列式**という概念を用います．

定義 3.2

2×2 行列 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ に対し，$\det A=ad-bc$ を A の**行列式**と呼ぶ．

よりサイズの大きい正方行列に対しても行列式を定義することができますが，ここでは省略します．行列式の著しい性質の一つとして，次があります．

定理 3.3

2×2 行列 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix}$ に対し，$\det(AB)=(\det A)(\det B)$ が成り立つ．

証明　定義に従って計算する．$AB=\begin{pmatrix}ap+br & aq+bs\\ cp+dr & cq+ds\end{pmatrix}$ より，

$$\begin{aligned}\det(AB)&=(ap+br)(cq+ds)-(aq+bs)(cp+dr)\\&=acpq+adps+bcqr+bdrs-acpq-adqr-bcps-bdrs\\&=adps+bcqr-adqr-bcps=(ad-bc)(ps-qr)\\&=(\det A)(\det B)\end{aligned}$$

となるので主張が確かめられた．■

行列式を用いて，定理 3.1 を証明しましょう．

定理 3.1 の証明　まず，$\sqrt{2}=\dfrac{p_n\sqrt{2}+q_n}{r_n\sqrt{2}+s_n}$ から $2r_n+s_n\sqrt{2}=q_n+p_n\sqrt{2}$ が成り立つ．p_n, q_n, r_n, s_n は整数であり，$\sqrt{2}$ は無理数であるから，$q_n=2r_n$ および $p_n=s_n$ が成り立つ．

一方，行列を用いた連分数の計算法から，

$$\begin{pmatrix}p_n & q_n\\ r_n & s_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}}_{n\text{ 個}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

が成り立つ．両辺の行列式をとって定理 3.3 を用いることで，

$$p_ns_n-q_nr_n=\left(\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\times\left(\det\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\right)^n\times\left(\det\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=1\times(-1)^n\times1=(-1)^n$$

を得る．左辺に $q_n = 2r_n$, $p_n = s_n$ を代入することで，$s_n^2 - 2r_n^2 = (-1)^n$ となるので，$(x, y) = (s_n, r_n)$ は $x^2 - 2y^2 = (-1)^n$ の整数解である． ■

ここでは $\sqrt{2}$ の無限連分数による表示を使って $x^2 - 2y^2 = 1$ の整数解を構成しましたが，同様の手法によって $x^2 - Ny^2 = 1$（N は平方数でない正整数）の整数解を構成することができます．このような方程式を**ペル方程式**と呼びます．例として，$N = 7$ の場合を考えてみましょう．以下のような手順で数列 $\{x_n\}$, $\{a_n\}$ を定めます．

- $x_0 = \sqrt{7}$, $a_0 = [x_0]$（$[x]$ は x 以下の最大の整数を表す）．
- $x_1 = \dfrac{1}{x_0 - a_0}$, $a_1 = [x_1]$.
- 以下同様に，$x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n - a_n}$, $a_{n+1} = [x_{n+1}]$ と定める．

$\sqrt{7} = 2.645\cdots$ に注意して具体的に計算していくと，

$$\begin{aligned}
x_0 &= \sqrt{7},\ a_0 = [\sqrt{7}] = 2, \\
x_1 &= \frac{1}{\sqrt{7}-2} = \frac{\sqrt{7}+2}{3},\ a_1 = \left[\frac{\sqrt{7}+2}{3}\right] = 1, \\
x_2 &= \frac{1}{\frac{\sqrt{7}+2}{3} - 1} = \frac{3}{\sqrt{7}-1} = \frac{\sqrt{7}+1}{2},\ a_2 = \left[\frac{\sqrt{7}+1}{2}\right] = 1, \\
x_3 &= \frac{1}{\frac{\sqrt{7}+1}{2} - 1} = \frac{2}{\sqrt{7}-1} = \frac{\sqrt{7}+1}{3},\ a_3 = \left[\frac{\sqrt{7}+1}{3}\right] = 1, \\
x_4 &= \frac{1}{\frac{\sqrt{7}+1}{3} - 1} = \frac{3}{\sqrt{7}-2} = \sqrt{7}+2,\ a_4 = [\sqrt{7}+2] = 4, \\
x_5 &= \frac{1}{(\sqrt{7}+2)-4} = \frac{1}{\sqrt{7}-2} = \frac{\sqrt{7}+2}{3} = x_1,\ a_5 = \left[\frac{\sqrt{7}+2}{3}\right] = 1 = a_1
\end{aligned}$$

となるので，$x_1, x_2, \ldots$ および $a_1, a_2, \ldots$ は周期 4 で循環することが分かります．$x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n - a_n}$ より $x_n = a_n + \dfrac{1}{x_{n+1}}$ なので，

$$\sqrt{7} = x_0 = a_0 + \frac{1}{x_1} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{x_2}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{x_3}}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{x_4}}}}$$

$$= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{x_5}}}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + (\sqrt{7}-2)}}}}$$

が成り立ちます．

$$\sqrt{7}-2=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+(\sqrt{7}-2)}}}}$$

を入れ子にすることで，$\sqrt{7}$ の循環無限連分数による表示

$$\sqrt{7}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\ddots}}}}}}}}}$$

$(1,1,1,4$ が繰り返す）も得られます．

さて，上で得た等式

$$\sqrt{7}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+(\sqrt{7}-2)}}}}$$

の右辺を，行列を用いて計算すると，

$$\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}\sqrt{7}=\begin{pmatrix}8&21\\3&8\end{pmatrix}\sqrt{7}=\frac{8\sqrt{7}+21}{3\sqrt{7}+8}$$

となりますが，分母に出てきた 2 つの整数 $(x,y)=(8,3)$ はペル方程式 $x^2-7y^2=1$ の整数解となっています．

ここでは証明しませんが，以下の定理の通り，一般の N についても同様のことが成り立ちます．

定理 3.4

N を平方数でない正整数とし，以下の手順で数列 $\{x_n\},\{a_n\}$ を定める．

- $x_0=\sqrt{N},\ a_0=[x_0]$.
- $n \geqq 0$ に対し，$x_{n+1}=\dfrac{1}{x_n-a_n},\ a_{n+1}=[x_{n+1}]$.

このとき，ある整数 $m>0$ に対して，$x_1,x_2,\ldots$ および $a_1,a_2,\ldots$ は周期 m で循環する．つまり，どん

な $n \geqq 1$ に対しても $x_{n+m}=x_n$ および $a_{n+m}=a_n$ が成り立つ．これは，$\sqrt{N}$ が

$$\sqrt{N}=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{\ddots}}}$$

という循環連分数表示を持つことを意味する．これから得られる等式

$$\sqrt{N}=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{a_m+(\sqrt{N}-a_0)}}}}$$

の右辺を，分母の有理化を行わずに計算した結果を $\dfrac{p\sqrt{N}+q}{r\sqrt{N}+s}$ と書くと，$(x,y)=(s,r)$ は方程式 $x^2-Ny^2=(-1)^m$ の整数解を与える．

注意 3.5

定理において m が奇数の場合は $x^2-Ny^2=-1$ の解が得られることになるが，m の代わりに $2m$ が周期だと思えば，$x^2-Ny^2=1$ の整数解も得られる．特に，ペル方程式 $x^2-Ny^2=1$ はどんな N についても整数解を持つ．

4　ロジャース・ラマヌジャンの連分数

最後に，少し毛色の変わった連分数の話をしましょう．q を $|q|<1$ を満たす数とし，次のような無限連分数（**ロジャース・ラマヌジャンの連分数**）を考えてみます．

$$R(q)=\cfrac{q^{\frac{1}{5}}}{1+\cfrac{q}{1+\cfrac{q^2}{1+\cfrac{q^3}{1+\cfrac{q^4}{\ddots}}}}}$$

$R(1)$ は，$\sqrt{2}$ の無限連分数による表示と同様の方法で計算でき，その値は $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ となります．ラマヌジャンは，$R(q)$ について，以下のような不思議な定理を発見しました．

定理 4.1

(1) $R(e^{-2\pi})=\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(2) $u=R(q), v=R(q^5)$ とおくと，$u^5=v\dfrac{v^4-3v^3+4v^2-2v+1}{v^4+2v^3+4v^2+3v+1}$ が成り立つ．

ここでは，この定理の証明を紹介することはできませんが，定理の背景にある，$R(q)$ の持つ「2×2 行列によって記述される対称性」について簡単に説明したいと思います．

まず，複素数 $z=x+yi$（x, y は実数，$y>0$）に対し，

$$q(z)=e^{2\pi iz}=e^{2\pi ix-2\pi y}=e^{-2\pi y}e^{2\pi ix}=e^{-2\pi y}(\cos 2\pi x+i\sin 2\pi x)$$

とおき，$F(z)=R(q(z))$ と定めます（$q(z)^{\frac{1}{5}}=e^{\frac{2}{5}\pi iz}$ と解釈します）．$F(z)$ は，おおむね $R(q)$ を「複素数範囲」で考えてできる関数となっています．この関数は，以下の定理で述べられるような対称性を持ちます．

定理 4.2

a, b, c, d を $ad-bc=1$ および「$a-1, b, c, d-1$ は 5 の倍数」を満たす整数とする．このとき，

$$F\left(\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}z\right)=F\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)=F(z)$$

が成り立つ．

例えば $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ の場合には，定理中の等式は $F(z+5)=F(z)$ となります．これは

$$q(z+5)^{\frac{1}{5}}=e^{\frac{2}{5}\pi i(z+5)}=e^{\frac{2}{5}\pi iz+2\pi i}=e^{\frac{2}{5}\pi iz}e^{2\pi i}=q(z)^{\frac{1}{5}}$$

より，当然成り立つ式となっています．一方，$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 5 & 1\end{pmatrix}$ の場合の等式 $F\left(\frac{z}{5z+1}\right)=F(z)$ は全く明らかではありません．

定理 4.2 のようなタイプの対称性を持つ関数は**モジュラー関数**と呼ばれ，不思議なことに，数学の様々な分野に登場します．モジュラー関数は，高い対称性を持つ，非常に珍しい関数なのですが，その「モジュラー関数がほとんどない」という事実が，ラマヌジャンの定理（定理 4.1）の証明の鍵の一つとなります．例えば定理 4.1 (1) を証明する際には，$G(z)=F\left(-\frac{1}{z}\right)=F\left(\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}z\right)$ という関数を新たに考えます．このとき，$ad-bc=1$ および「$a-1, b, c, d-1$ は 5 の倍数」を満たす整数 a, b, c, d に対し，

$$\begin{aligned}G\left(\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}z\right)&=F\left(\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}z\right)=F\left(\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}z\right)\\&=F\left(\begin{pmatrix}d & -c\\ -b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}z\right)=F\left(\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}z\right)=G(z)\end{aligned}$$

なので，$G(z)$ も $F(z)$ と同じ対称性を満たすことが分かります．「モジュラー関数がほとんどない」ということから，$F(z)$ と $G(z)$ には何らかの関係があるのではないかと推測されますが，実際に

$$G(z)=\frac{-(1+\sqrt{5})F(z)+2}{2F(z)+1+\sqrt{5}}$$

という式が成り立つことが証明できます．両辺に $z=i$ を代入すると，$G(i)=F\left(-\frac{1}{i}\right)=F(i)$ なので，

$$F(i)=\frac{-(1+\sqrt{5})F(i)+2}{2F(i)+1+\sqrt{5}}$$

となります．これの分母を払って得られる $F(i)$ の 2 次方程式を解くことで，$F(i) = R(q(i)) = R(e^{-2\pi})$ の値が求まり，定理 4.1 (1) が得られます．

モジュラー関数の一般化にあたる**保型形式**および，その現代的な定式化である**保型表現**は，現代整数論の一つの柱であり，近年でも盛んに研究されています．その正体は，「よりサイズの大きな行列による対称性を持つ関数」および「そのような関数を集めてできる空間」なのです．