

「複素数を超えて—四元数と八元数—」

1 自然数から整数へ

あらゆる数の体系の中で最初に現れるのは自然数 (natural number) であり、ものを「数える」のに使われる。あまりにも基本的なので意識することは少ないが、数は高度に抽象的な概念である。例えば一本の木や一個のりんご、一人の人間などは、実体としては全く異なる対象であるが、それらに共通する性質を抜き出したものが「1」という数なのである。数の概念を獲得することによって、例えば穀物の分配の計画を立てる時に、穀物は倉庫に置いたまま、穀物と同じ数の小石を分ければ良いことになる。扱う数が大きくなってくると、いくつかの小石をひとまとめにして中くらいの大きさの石で代用したり、中くらいの石をいくつかまとめて更に大きな石で代用したりといった工夫も行われたことであろう。このように、同じ結果を得るために必要な労力を最小化することが、数学の発展の原動力である。また、実体のあるものだけでなく、一日や一年といった時間も数で計ることができる。これによって、例えば冬の長さや穀物の蓄えを比較し、食べる量を調節したりできるようになった。

四則演算 (the four basic arithmetic operations) で最も基本的なのは足し算 (addition) である。自然数の足し算はいつでもできるが、引き算 (subtraction) はいつでもできるとは限らない。5個のりんごがあった時に、ここから3個のりんごを取り除けば残るりんごは2個であるが、5個のりんごから7個のりんごを取り除くことはできない。しかし、数というものはそもそも抽象的なものであり、5個のりんごや5人の人間は実体として存在できても、5という数が実体として存在するわけではない。この抽象的な自然数というものを、いつでも引き算ができるように拡張するというのは(少なくとも後から見れば)自然なことであった。

自然数 n, m に対してその差 $n - m$ をいつでも定義する方法は、 n が m より大きいときは普通に定義して、 m が n より大きいときは0として定義するというものであるが、これは自然数の足し算と引き算の持つ結合法則 (associative law)

$$(l + m) - n = l + (m - n) \quad (1.1)$$

を壊す。実際、この定義では例えば

$$(2 + 1) - 2 = 3 - 2 = 1 \neq 2 + (1 - 2) = 2 + 0 = 2 \quad (1.2)$$

などとなる。そこで、自然数の範囲に留まる代わりに、整数 (integer) と呼ばれる新しい数を発明して、これまでに成り立っていた法則をなるべく壊さないようにすることが考えられた。つまり、正の自然数 n に対して $-n$ という数を新たに導入し、 n より大きい自然数 m に対して $n - m$ を $-(m - n)$ として定義するのである。こうすれば自然数から自然数を引くことは必ずできるが、新しく付け加わった負の数に対して、足し算と引き算はどう定義されるべきだろうか。このためにはまず、引き算は足し算の一種であると認識することが大切である。つまり、自然数 n に対し、 $-n$ というのは n を足すと 0 になる数のことであり、 n を引くというのは $-n$ を足すということなのである。これをもう少し学術的 (pedantic) に言うと、「 $-n$ は n の加法に関する逆元である」となる。こうすれば、まず第一に、例えば

$$(3 - 2) - 1 = 0 \neq 3 - (2 - 1) = 2 \quad (1.3)$$

の様に引き算が見かけの上で結合法則を壊すことが、

$$(3 + (-2)) + (-1) = 0 = 3 + ((-2) + (-1)) \quad (1.4)$$

となって解消される。その上で、足し算の交換法則 (commutative law) が整数の範囲で成り立つことを要請すれば

$$n + (-n) = (-n) + n = 0 \quad (1.5)$$

となって、正の自然数 n に対し、負の数 $-n$ の逆元 $-(-n)$ は n にならなければならないことが分かる。整数の引き算は逆元の足し算として定義されるので、整数の足し算を定義すれば引き算も自動的に定義される。整数の足し算は、結合法則から一意的 (unique、ただ一通り) に決まる。ここまでの議論をまとめると次のようになる：

- 引き算がいつでもできるようにするには、自然数の範囲に留まっているわけにはいかず、負の数を新たに加えて整数の世界に行かなければならない。
- 整数の世界では加法に関する逆元が存在し、引き算は逆元の足し算と理解することができる。
- 自然数の持つ足し算の結合法則と交換法則が整数に対しても成り立つことを要請することによって、整数の足し算は一意的に定まる。

2 整数から有理数へ

四則演算で次に基本的なのは掛け算 (multiplication) である。自然数の掛け算は足し算の反復として定義される。例えば 1 人が 1 日に穀物を 1 だけ食べるとして、100 人

の村が100日過ごすのに必要な食料がいくらかを計算するには、 $100 + 100 + \dots + 100$ と100を100回足す必要がある。掛け算と位取りの発明は、この計算を飛躍的に容易にした。算盤やアラビア数字を使わず、位取りなしの漢数字やローマ数字のみで大きな数の掛け算をするのは絶望的に面倒である。筆算の本質は分配法則 (distributive law) にあり、これによって一般の自然数の掛け算が一桁の自然数の掛け算の繰り返しに帰着される。一桁の自然数の掛け算は表を丸暗記してそれを参照すること (table lookup) にしてしまえば、大きな数の掛け算が、足し算を繰り返すよりも遥かに早く計算できるのである。これも、同じ結果を得るために必要な労力を最小化する試みが成功した典型的な例である。

足し算の場合と同様に、整数の掛け算は自然数の掛け算に対して成り立つ法則がなるべくそのまま成り立つという要請から一意的に定まる。特に、(0を含む)自然数を整数に掛ける事は足し算の繰り返しとして定義され、負の数を掛ける事は、分配法則

$$0 = (n + (-n)) \times m = n \times m + (-n) \times m \quad (2.1)$$

によって正の数を掛ける事に帰着される。特に $(-1) \times (-1) = 1$ である。

引き算が加法に関する逆元の足し算であるように、割り算 (division) は乗法に関する逆元の掛け算である。そして、自然数に加法の逆元を付け加える事で整数が得られたように、整数に乗法の逆元を付け加える事で有理数 (rational number) が得られる。ただし、全ての自然数は1から足し算で作られるが、整数を掛け算から作ろうとすると全ての素数が必要になるので、有理数の構成は整数よりも複雑である。足し算に対する掛け算には掛け算に対する冪乗が対応し、正の有理数は素数の冪の積として一意的に表示される;

$$r = \prod_p p^{e_p}. \quad (2.2)$$

ここで e_p は正とは限らない整数で、 p は有限個の素数を走る。有理数の積は構成法から自然に定まる。また、有理数の割り算は逆元の積として定め、そこから「分母と分子をひっくり返して掛ける」という計算規則が導かれる。有理数の足し算はより難しいが、やはり結合法則、交換法則および分配法則から一意的に定まり、「通分して足して約分する」という規則を導く。また、約分して常に既約分数で表す代わりに、可約分数を許す定式化もできるが、これには「同値関係による商」という概念を必要とする。

3 有理数から実数、複素数へ

有理数と実数 (real number) の間にある差は、自然数と整数や、整数と有理数の間の差よりも遥かに大きい。実数と複素数 (complex number) の差や、複素数と四元数 (quaternion) や八元数 (octonion) との差よりも大きいほどである。この差について詳しく解説することは控えるが、実数には代数的数 (algebraic number) と超越数 (transcendental number) があり、代数的数は代数方程式 (algebraic equation) の解を付け加える事で得られるが、超越数は極限 (limit) と呼ばれる操作によって得られ、ある意味で人智を超えているとだけ述べておこう。

一方、代数方程式の解を付け加える事は、整数や有理数の構成の自然な拡張である。実際、負の数を付け加えることは、 $x + n = m$ の形の代数方程式が常に解を持つようにする事と同値であり、有理数を付け加えることは、 $a \neq 0$ に対して $ax = b$ の形の代数方程式が常に解をもつようにする事と同値である。より一般に、 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ の形の方程式が解を持つようにするには、最低でも複素数が必要である。実際、方程式 $x^2 + 1 = 0$ は実数の範囲に解を持たない。 i が無ければ解けない方程式があるのである。

しかし、解けない方程式 $x^2 + 1 = 0$ の解 i を無理やり付け加えることに意味があるかは自明ではない。例えば、同様に解けない方程式として $0 \times x = 1$ があるが、これに解 ∞ を無理やり付け加えて得られる等式 $0 \times \infty = 1$ から、 $1 = 0 \times \infty = (0+0) \times \infty = 0 \times \infty + 0 \times \infty = 1 + 1 = 2$ となって、 $1 = 2$ が証明されてしまう。また、 i があれば全てが上手くいくのか、という問題もある。 i があれば $x^2 = -1$ という方程式は解けるが、それでは例えば $x^2 = i$ という方程式は解けるのだろうか、それとも、この方程式を解くためにさらに新しい数を追加しないといけないのだろうか？

後者の問題は「数学の帝王」Carl Friedrich Gauss によって解決され¹、代数学の基本定理 (fundamental theorem of algebra) と呼ばれている。この定理によると、複素数を係数とする代数方程式は、重複度を込めてちょうど次数と同じだけの個数の解を持つ。例えば、 $x^2 = i$ という方程式の解は $x = \pm(1+i)/\sqrt{2}$ で与えられる。一方、前者の問題については、「アイルランド史上最高の数学者」William Rowan Hamilton によって、複素数を実数の組 (a, b) と考え、そこに和と積を

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \quad (3.1)$$

$$(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \quad (3.2)$$

で定義するというアプローチが考案された。通常の実数は $(a, 0)$ という形の組として複素数の一部となり、 $(0, 1) \times (0, 1) = (-1, 0)$ から、 $(0, 1)$ は i と同定 (identify) され

¹Gauss の証明が今日の視点ではギャップを含むという指摘もある。例えば Steve Smale, *The fundamental theorem of algebra and complexity theory*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 4 (1981), no. 1, 1-36 を見よ。

る。実数は直線上の点と対応するように、複数は平面上の点と対応し、和は平行移動に、積は拡大・縮小と回転に対応する。つまり、複素数は「平面の数」なのである。有理数や実数の満たす7つの法則

- 足し算の結合法則
- 足し算の交換法則
- 足し算に関する逆元(あるいは引き算)の存在
- 掛け算の結合法則
- 掛け算の交換法則
- 掛け算に関する逆元(あるいは割り算)の存在
- 足し算と掛け算に関する分配法則

は複素数に対しても成り立つ。実は、この7つの法則を全て満たす実数の拡張は複素数しかないのである。

4 四元数と八元数

i があれば上手く行くことは分かって、 i さえあればそれで良いかどうかはまた別の問題である。複素数を実数の組と看破した Hamilton は、実数の3つ組 (triplet) に積を適当に定義して、複素数を更に拡張できるかという問題に取り組んだ。10年とも言われる長い試行錯誤の末、1843年の10月16日に、3つ組ではなく4つ組には、前節で挙げた実数の満たす7つの法則のうち、1つを除いて全てを満たす積が定義できる事を発見した。たった1つ失われる法則は掛け算の交換法則である。四元数の積の基本関係式 (fundamental relations) は

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \quad (4.1)$$

で与えられ、ここから掛け算表 (multiplication table) が

$$\begin{array}{c|ccc}
 & i & j & k \\
 \hline
 i & -1 & k & -j \\
 j & -k & -1 & i \\
 k & j & -i & -1
 \end{array} \quad (4.2)$$

と決まる。

八元数においては、積の交換法則に加えて積の結合法則までが失われる。結合法則は交換法則より更に基本的かつ重要な性質であり、これが無いと到る所で困難が生じるので、八元数を日常生活で見かける機会は四元数よりも遥かに少ない。しかし、例えば G_2 と呼ばれる例外型単純 Lie 群は、八元数体の \mathbb{R} 上の自己同型群として現れる。³

自然数から複素数に至る道が必然であるのに対し、四元数と八元数には、存在自体が奇跡と思わせるような不思議な魅力がある。例えば、複素数があって、四元数があって、八元数があるなら、16元数や32元数があっても良さそうに思えるが、この安直な期待は正しくない。この事実には複数の解釈があるが、例えば例外型単純 Lie 環と関連付けて述べることができる。Lie 環とは何で、その中で例外型単純 Lie 環とは何かという話はここではしないが、Lie 環と呼ばれる数学的対象があって、その中でも単純 Lie 環と呼ばれる基本的な対象があって、完全な分類が知られている。単純 Lie 環は無数にあるが、その中で非常に特別なものが5つだけあって、例外型単純 Lie 環と呼ばれている。これは、正多角形は無数にあるが、正多面体は5個しか無い事に似ている。⁴一方、全ての例外型 Lie 環は四元数や八元数と (G_2 ほどではないにしても) かなり直接的に関係している。従って、四元数と八元数の存在は、例外型 Lie 環の存在と密接に関係しているのである。

Hamilton は解析力学に不朽の業績を残したが、四元数の魅力に取り憑かれ、その研究に後半生を捧げた。四元数を「信仰」する学派は Hamilton の死後も生き残り、「ベクトル派」の学者と激しい論争を繰り広げたという。この論争はベクトル派の勝利に終わり、四元数派は表面的にはほぼ完全に消滅した。しかし、形を変えた四元数派は今も生き残っている。Hamilton は、3元数ではなく四元数が存在することの「理由」の候補として、我々の住む3次元の空間に時間を加えたものが4次元になることを挙げている。一方、弦の理論家は、我々の住む時空が実は4次元ではなく11次元であることを主張する。余分の7次元は純虚八元数の空間と同一視され、例外型単純 Lie 群 G_2 が自然に作用する。また、 $E_8 \times E_8$ 混成弦理論と呼ばれる弦理論があり、その名の通り例外型単純 Lie 群 E_8 が中心的な役割を果たすが、ここにも八元数が密かに顔を出しているとも見ることができる。これらの事実が数秘術を超えて実体を獲得するかどうかは、時間のみが答えてくれるであろう。

³III の場合と同様の理由で、 $\text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{O})$ は $\text{SO}(7, \mathbb{R})$ の部分群になるが、これは $\text{SO}(7, \mathbb{R})$ 全体ではなく真部分群になる。))

⁴単に似ているだけでなく、実は深い関係があるのだが、その話もここではしない。例えば <http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/kazushi/course/JMO2015.pdf> やその参考文献を見よ。