微分方程式で表現される粘性や拡散の効果

儀我 美一
(GIGA, Yoshikazu)
（東京大学教授・北海道大学名誉教授）

東京大学大学院数理科学研究科
談話会（2021年3月19日）

粘性や拡散の生みだす多様な効果を
どう数学的に表現したらよいか？

内 容

1. 平滑化効果（例: ストークス方程式）
2. 爆発現象（例: 半線形熱方程式）
3. ちぎれる曲面（例: 平均曲率流方程式）
4. 特異拡散（例: クリスタライン平均曲率流方程式）
5. 画像処理、データサイエンス、結晶成長への応用

1. 平滑化効果

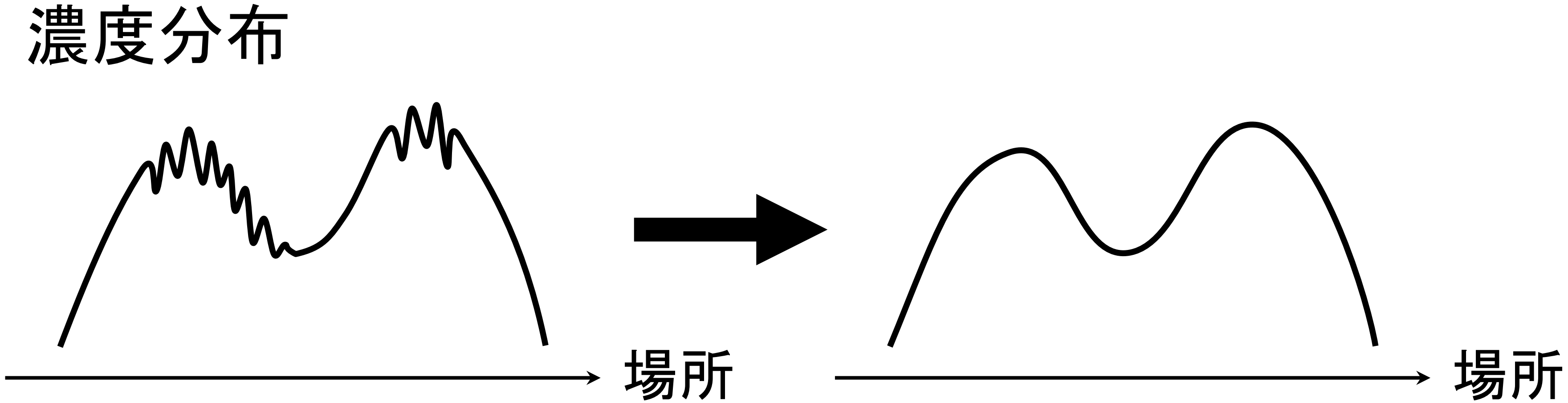
拡散：ひろがり散ること。（例：核拡散防止）

物質の濃度が場所によって異なるとき、時間と共に濃度が一様になる現象。よく混合されていない塩水も、時間がたてば**濃度が一様**になる類。（広辞苑）

粘性：粘る性質。

流体内部で流れの速度が一様でないとき、**速度を一様**にしようとする力が生じるような流体の性質。（広辞苑）

平滑化とその応用



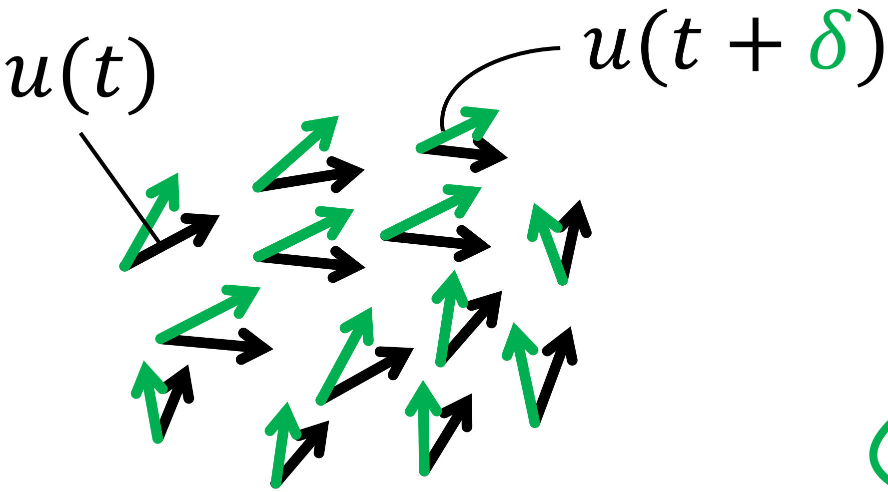
平滑化の利用:

- ７日間移動平均
- 画像からノイズの除去

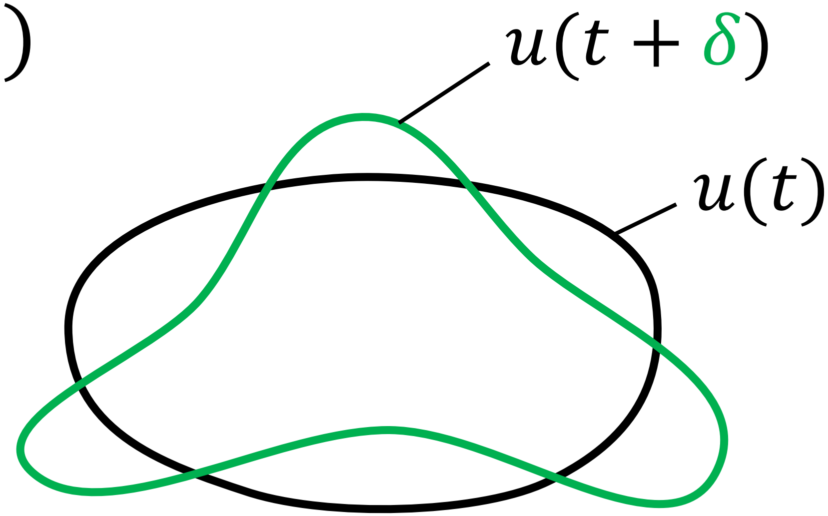
…

時間発展現象の記述

発展方程式：ある量（状態、形状）u の増加速度（時間変化率）du/dt が、そのときの量 u によって定まる方程式。評語的には $\dot{u} = Au$ と書ける。（$\dot{u} = du/dt$）



ベクトル場



曲線

具体的な方程式の例

- 物質（濃度）の**拡散**方程式

  未知量: 時刻 t、地点 x での濃度 $u = u(t,x)$

  方程式: $\dot{u} = \Delta u$ （Δ: ラプラシアン）（Δu: 拡散項）

- 熱伝導方程式（熱方程式）（上の方程式と同じ: u は温度）

- **粘性**流体の運動を表すナヴィエ・ストークス方程式

  未知量: 時刻 t、地点 x での流速 $u = u(t,x)$

  時刻 t、地点 x での圧力 $p = p(t,x)$

  方程式: $\dot{u} + (u, \mathrm{grad})u + \mathrm{grad}\, p = \Delta u$

  $$\mathrm{div}\, u = 0$$

（非圧縮性流体: 粘性係数 1、密度 1 としている。）

Δu: 粘性項、$(u, \mathrm{grad})u$: 輸送項

具体的課題（ストークス方程式について）

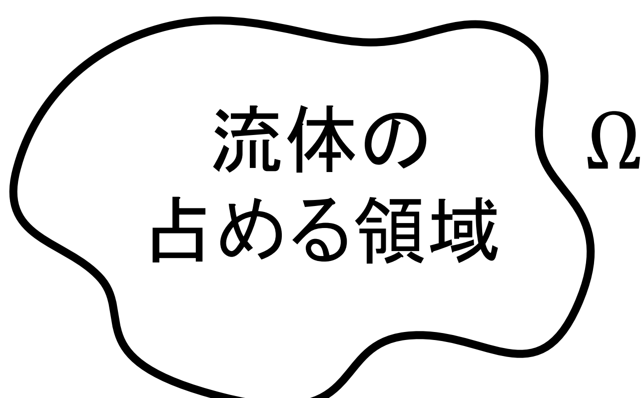
ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ 内の領域 Ω で線形化方程式（ストークス方程式）の初期値問題を考える。（輸送項なし）

$$\dot{u} + \mathrm{grad}\, p = \Delta u, \quad \mathrm{div}\, u = 0 \quad \text{in} \quad \Omega$$

$$u = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \quad \text{（境界条件）}$$

$$u\Big|_{t=0} = u_0 \quad \text{in} \quad \Omega \quad \text{（初期条件）}$$

- u_0 が滑らかでなくても、u は時刻 $t > 0$ で滑らかになるか？　この方程式は形式的には $\dot{u} = Au$ と書ける。そこで、u の時刻 t での状態を $u(t) = e^{tA}u_0$ と書く。

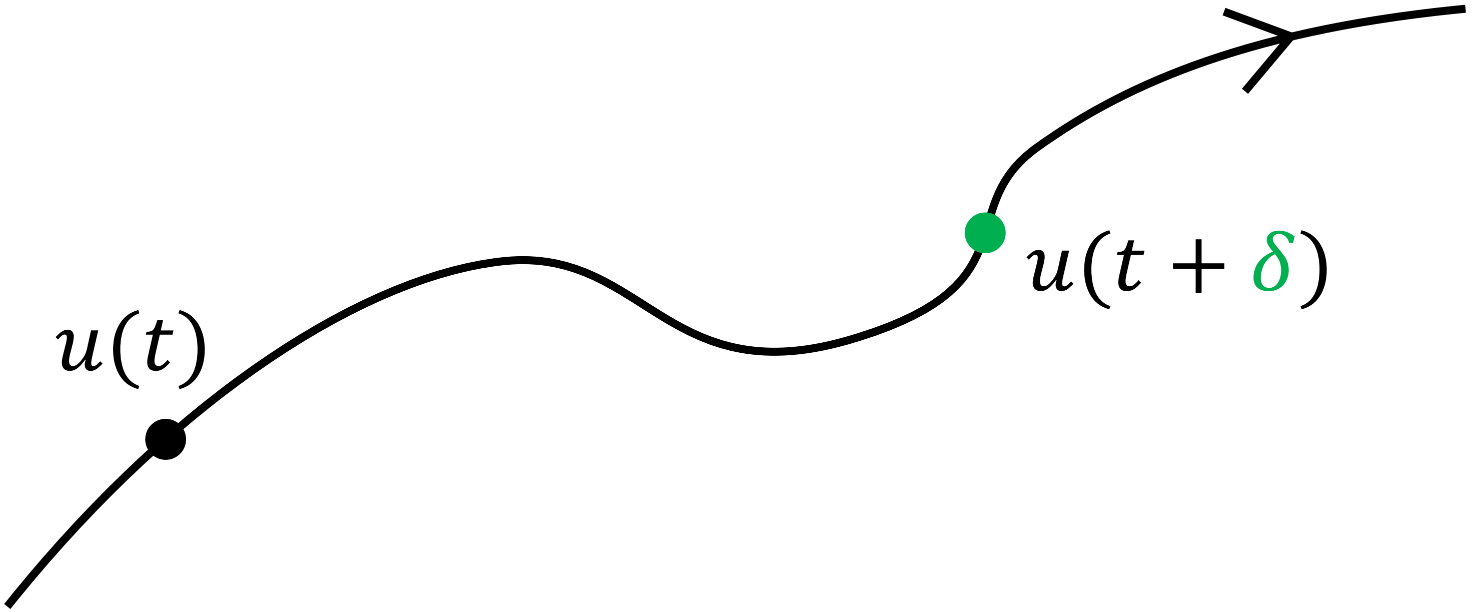


問題点

- 解を具体的に式で書けない。
- 滑らかさをどう定量的にとらえるか。

  関数解析の言葉で厳密に表現できる。（cos、sin といった個々の関数に注目するのではなく、同じ性質を持った関数の集合（集まり）を考える。個々の関数をこの集合の点と見る。）

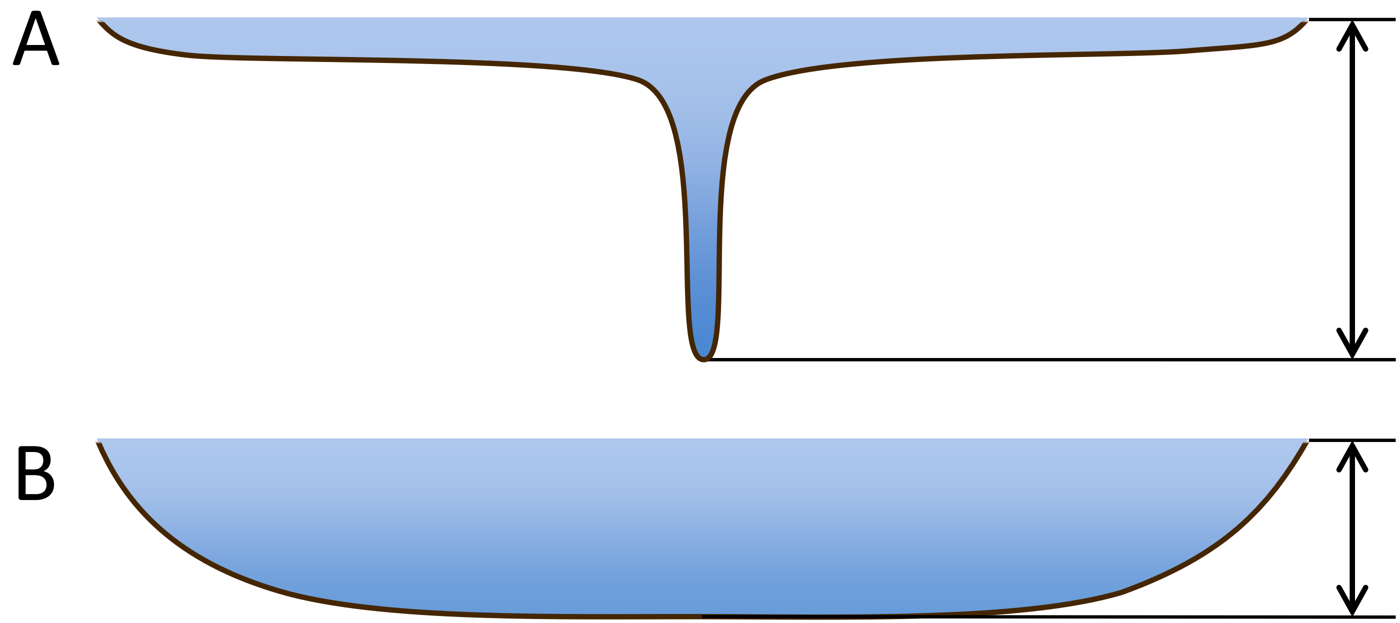
遷移する状態



無限次元空間内の曲線と捉える。

関数の大きさをどうはかるか

例：湖の深さ



どちらが深いか？

- 最も深いところの深さは A が大きい。
- 平均の深さは B が大きい。

➡ さまざまな「ノルム」で大きさを表現する。

数学的表現

定理: Ω を滑らかな有界領域とする。このとき、解作用素 e^{tA} は L^r_σ $(1 < r \le \infty)$ で、**解析半群**となる。

（ $r = 2$ 明らか; $1 < r < \infty$, V. A. Solonnikov (1977), YG, Math. Z. (1981); $r = \infty$, K. Abe（阿部）– YG, Acta Math. (2013). ）

- X をバナッハ空間とする。半群 e^{tA} が解析半群であるとは、$\sup_{0<t<1} \|tAe^{tA}\|_X < \infty$ のときをいう。
- $L^r_\sigma = \left\{ u = (u^1, \dots, u^n) \in L^r(\Omega) \,\middle|\, \int_\Omega u \cdot \operatorname{grad} \varphi \, dx = 0 \right.$
$\left. \text{for all} \quad \operatorname{grad} \varphi \in L^{r'}(\Omega) \right\}.$

  ここで、r' は r の共役指数、すなわち $1/r + 1/r' = 1$ とする。

（ L^r の閉部分バナッハ空間）

（$1 \le r < \infty$の場合）$f \in L^r(\Omega) \Leftrightarrow \left(\int_\Omega |f|^r \, dx\right)^{1/r} = \|f\|_r < \infty$ （L^rノルム）

〈平滑化効果を厳密な形で述べられる。〉

〈熱方程式も同様な性質がある。統一的な理解が可能になる。〉

ミレニアム問題

3次元領域 Ω を占める非圧縮性粘性流体を考える。初期条件、境界条件を与えたときナヴィエ・ストークス方程式の時間無限大まで**滑らかな解**が存在するか？（2次元の場合は解決済み。3次元の場合、初速度が小さければ（低レイノルズ数ならば）存在する。）

（全空間 J. Leray, Acta Math. (1934)；境界つき O. A. Ladyzhenskaya ... T. Kato（加藤）– H. Fujita（藤田）(1962), YG – T. Miyakawa（宮川）, Arch. Rational Mech. Anal. (1985), YG, J. Differential Equations (1986) ...）

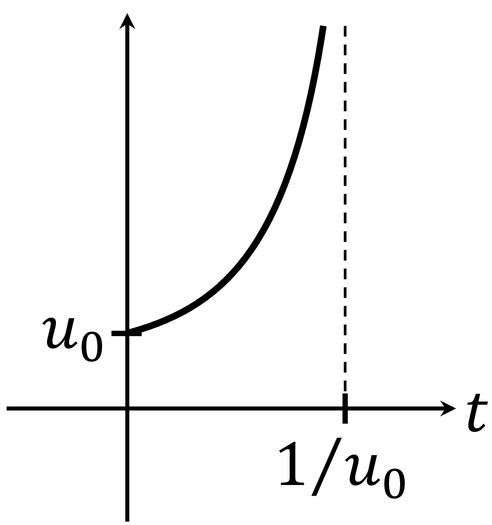
（あまりに特異性が強いと平滑化不能 J. Bourgain – N. Pavlovic (2008), T. Yoneda（米田）(2010) ...）

2. 爆発現象

$$\begin{cases} \dot{u} = au \\ u\Big|_{t=0} = u_0 \end{cases} \qquad \text{解 } u = e^{at}u_0$$

a 定数（増加率一定）

仮に $a = u$ とすると $u(t) = \dfrac{1}{T-t}$, $T = 1/u_0$



有限時間で「爆発」する。

$T = 1/u_0$ を爆発時刻という。

燃焼現象と発火

$$\begin{cases} \dot{u} = \Delta u + f(u) \quad \text{in} \quad \Omega \subset \mathbf{R}^n \text{（反応拡散方程式）} \\ u\big|_{t=0} = u_0 \quad \text{in} \quad \Omega \\ u = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

$f(u) = |u|^{q-1}u$（藤田方程式）, $q > 1$

$f(u) = e^u$（燃焼現象）

u は温度、爆発時刻は発火の始まる時刻といえる。

Δu: 拡散項、$f(u)$: 反応項

爆発現象と発火

爆発点付近での漸近解析

YG – R. V. Kohn, Comm. Pure Appl. Math. (1985)…

M. Herrero – J. J. Velázquez … F. Merle – H. Zaag…

拡散の効果はいかに

例えば $q = 2$ のとき、爆発時刻 T 付近で

$$|u(x,t)| \leq \frac{C}{T-t}, \quad C\colon \text{定数}$$

となるか。答えは空間次元による。

タイプＩの爆発

定理: $1 < q < q_S = (n+2)/(n-2)$ とする。また、Ω を有界凸領域とする。

$$|u(x,t)| \le \frac{C}{(T-t)^{1/(q-1)}}, \quad t < T, \quad x \in \Omega$$

ただし、T は爆発時刻とする。

YG – R. V. Kohn (1987), YG – S. Matsui（松井）– S. Sasayama（笹山）(2004),（cf. A. Friedman – B. Mcleod (1985) $\dot{u} \ge 0, u \ge 0$ のときは、q の制限なしで成立）

- $q > q_S$ のときタイプＩ型ではない爆発が存在する。

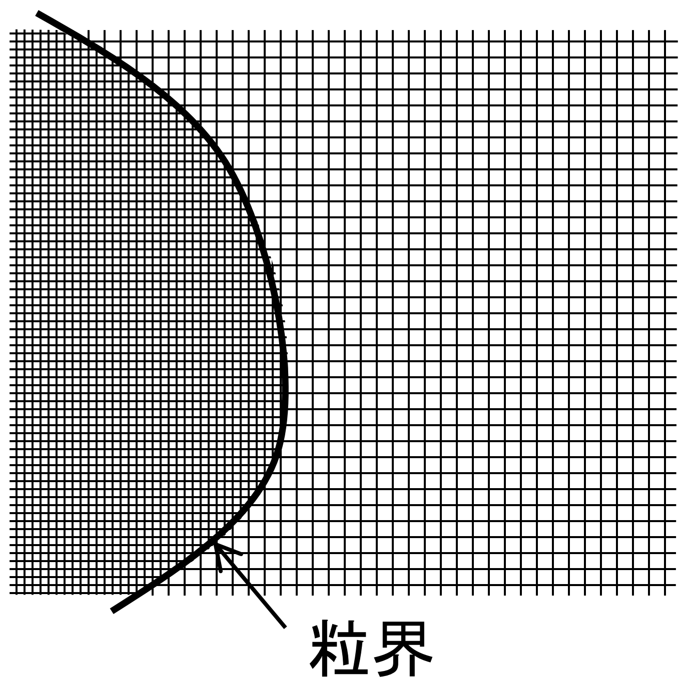
（ $q > q_{JL} > q_S$ のとき、正値球対称爆発解でタイプＩでないもの（タイプⅡ型）が存在。M. A. Merrero – J. J. L. Velázquez (1994), N. Mizoguchi（溝口）(2004), H. Matano（俣野）(2007), N. Mizoguchi (2011), $q = q_{JL}$ のとき Y. Seki（関）(2018), (2020), $\dot{u} = \Delta u + |x|^r |u|^{q-1} u$ への拡張 A. Mukai（向井）（博士論文 2021）石毛研究室）

3. ちぎれる曲面

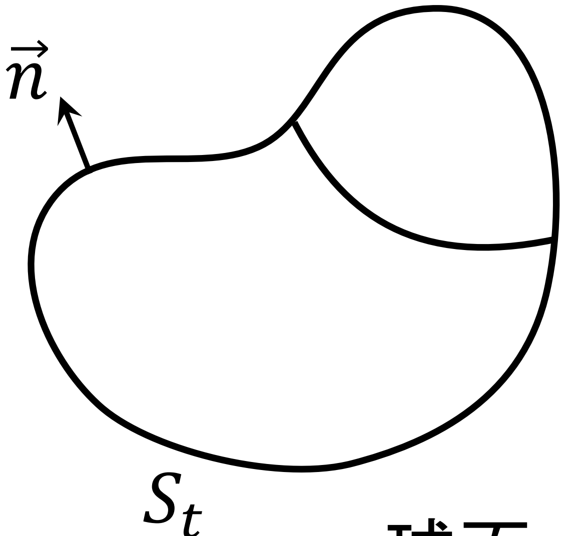
金属の焼きなまし時の粒界の動き:

「表面積の減り方が最も大きくなるように曲面を動かす。」

表面積の微分（変分）＝平均曲率



平均曲率流方程式
(W. W. Mullins (1956))

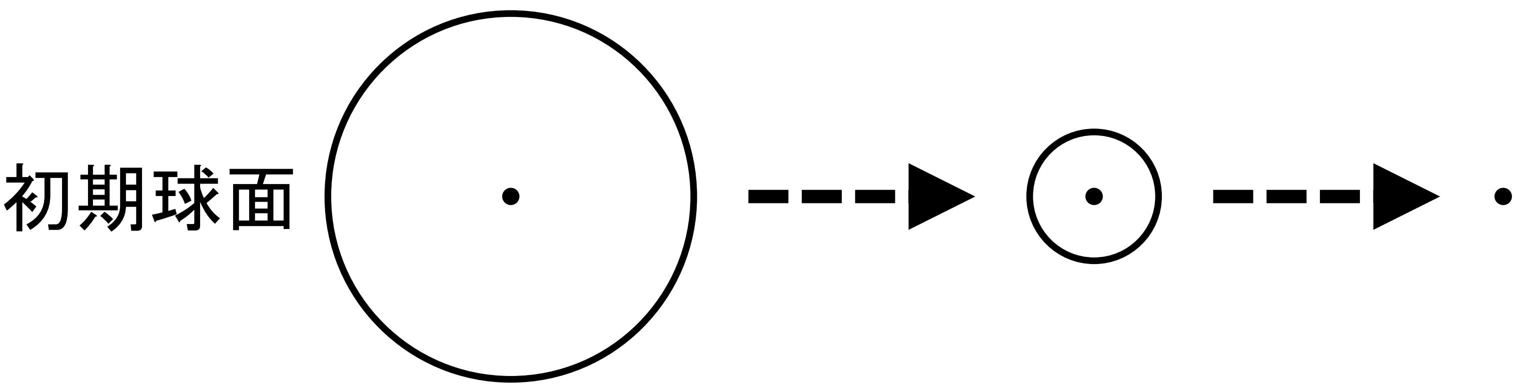


$V = H$（S_t 上）

V: 法ベクトル $\vec{n}$ 方向の法速度

H: S_t の平均曲率

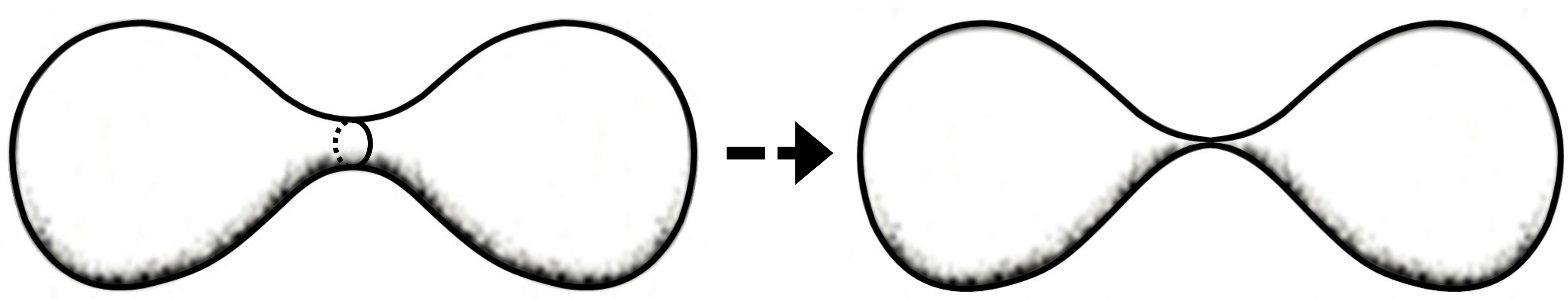
球面: 球のまま1点に縮む。



特異点の発生

- 曲面の場合

はじめの形　　ちぎれる



S_0　　S_t

（持ち手の細いダンベル）　　(M. Grayson (1989))

- 平面内の曲線の場合は、特異点は生じない。
  (M. Grayson (1986))

なぜ微分方程式の解の定義が必要か

微分方程式: 現象の記述に重要、モデルの作成に重要
一方で、簡単な関数では解を表せないことが多い。

　　……→ 数値計算(数学不要論?)

方程式の特徴がわからないと、有効な数値計算はできない。

- 数値計算の妥当性(数値解析)
- 解の**一意性**、存在性(数学解析)

広義解

微分できない関数を微分方程式の解とみなすにはどうするか？

(1) 変分的な考えに基づく解 : 超関数解

(2) 最大値原理に基づく解 : 粘性解

今日、平均曲率流方程式については両方のアプローチが可能。(2) について述べる。

(1) K. Brakke (1978), T. Ilmanen (1993), … Y. Tonegawa（利根川） et al.（ヴァリフォード）

微分できない関数を解とみなすには

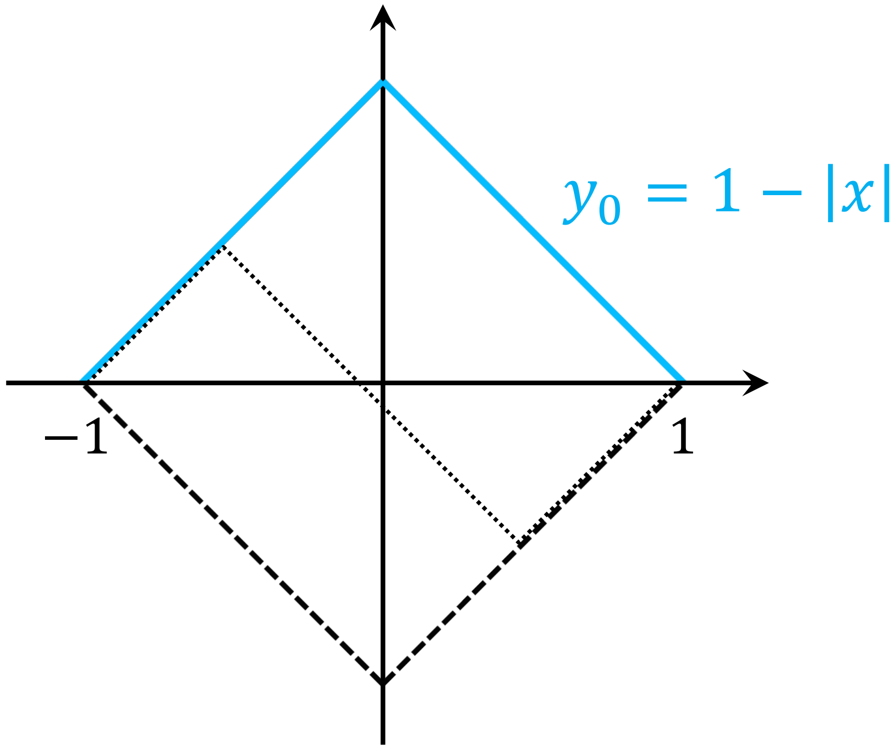
例（１次元のアイコナール方程式）

$$\begin{cases} \left|\dfrac{du}{dx}\right| - 1 = 0, \quad |x| < 1 \\ u(\pm 1) = 0 \end{cases}$$

の解を求めよ。数学の答えは一つではない。

- C^1級で方程式を満たす解は存在しない。
- 微分が不連続な解は無数に存在する。

解の例と粘性解



$$\left|\frac{du}{dx}\right| - 1 = \varepsilon \frac{d^2u}{dx^2}, \quad u(\pm 1) = 0$$

の解 u^ε

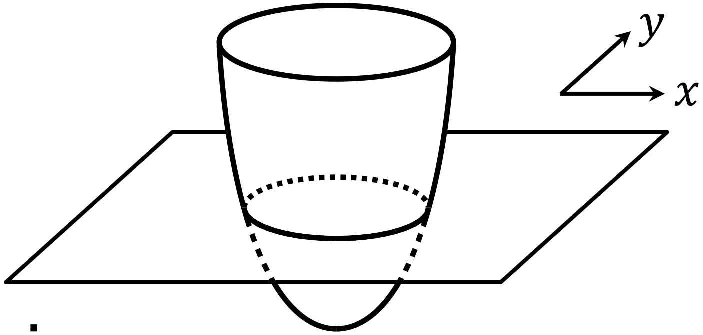
$$\lim_{\varepsilon \to 0} u^\varepsilon = y_0$$ （粘性解）

y_0: 境界からの距離関数
（最小脱出時間）

$\varepsilon \to 0$ とすることを粘性消滅法という。近似の仕方によらないように、極限を特徴づける。

M. G. Crandall – P. L. Lions (1981) ... H. Ishii（石井）... H. Mitake（三竹）

等高面法



特異点のある曲面をどう表すか？

曲面の表し方: 単位円の場合

(1) 媒介変数表示: $x = \cos s\,,\ \ y = \sin s$

(2) 関数のグラフによる表示: $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$

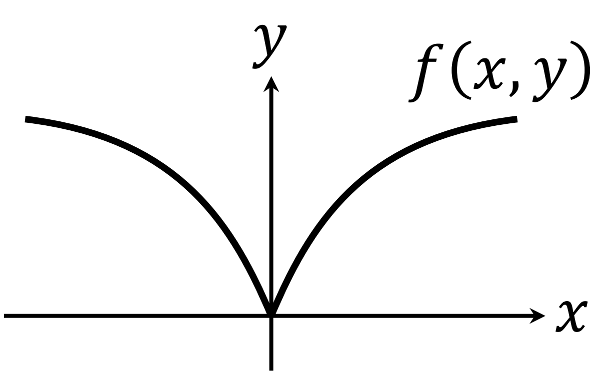
(3) 関数の(零)等高線として表す　$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | f(x, y) = 0\}$$

関数が滑らかでも等高線には特異点が生じうる。

例: $f(x, y) = x^2 - y^3$

$f(x, y) = 0$ にはカスプあり。



等高面解

$V = H$ は S_t が u の等高面の場合

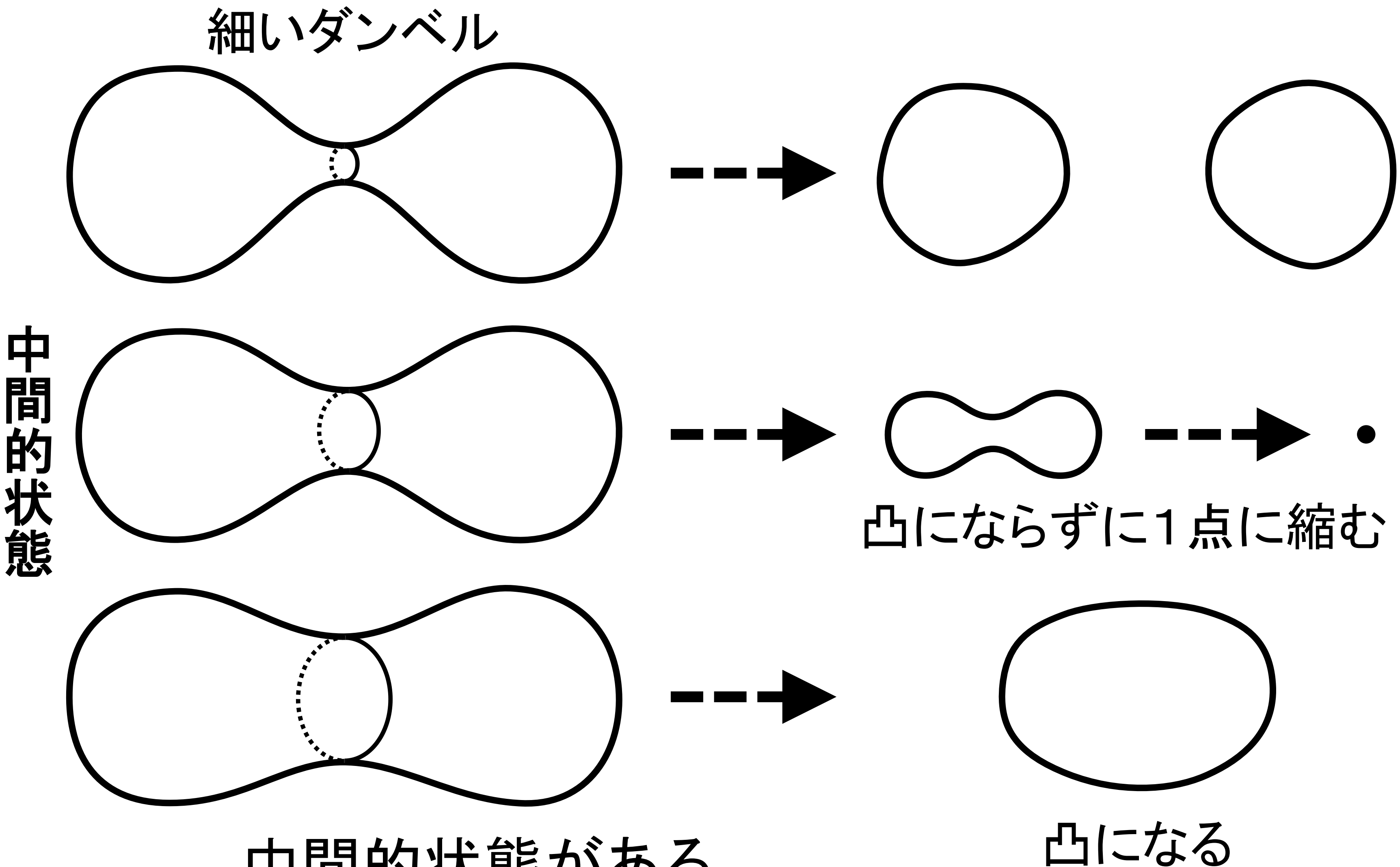
(L) $$\frac{1}{|\mathrm{grad}\, u|}\dot{u} = \mathrm{div}\left(\frac{\mathrm{grad}\, u}{|\mathrm{grad}\, u|}\right)$$ と同値

この方程式を全空間で考える。u の各等高面は、他の等高面と独立に動く。（拡散が退化している。）粘性解の概念を拡張すると (L) の初期値問題を時間大域的に一意に解ける。この解を**等高面解**という。

定理: 与えられた初期曲面 S_0 に対して $V = H$ を満たす等高面解が時間大域的にただ一つ存在する。

Y. G. Chen（陳）– YG – S. Goto（後藤）, J. Differential Geom. (1991), L. C. Evans – J. Spruck, J. Differential Geom. (1991).

タイプⅡ型の収縮



中間的状態がある。

S. Altschuler – S. Angenent – YG (1995) … T. H. Colding – W. P. Minicozzi II (2015)

4. 特異拡散

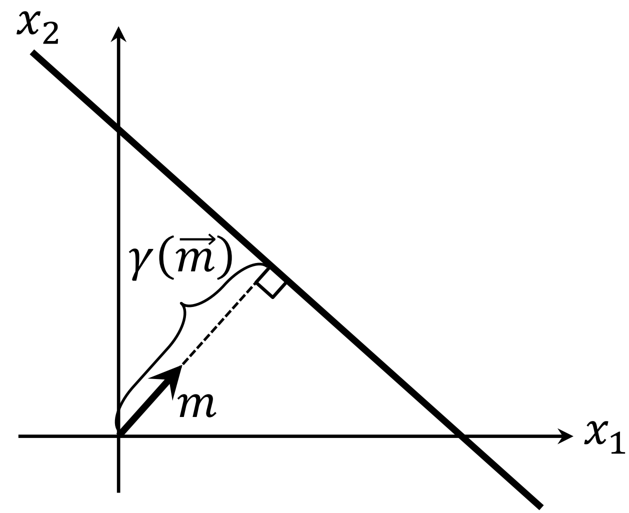
結晶成長現象では異方性を考える必要性がある。表面積ではなく表面エネルギーを最も減らすように曲面を動かす。

$$I(S) = \int_S \gamma(\vec{n})dS$$

γ: 既知　しかし、低温物理では滑らかでないことがある。

ファセット

異方的等周問題： S の囲む体積一定のもと表面エネルギーを最小にせよ。



解：ウルフ(Wulff)図形

等方的の場合は球が解となる。

- $1/\gamma$ の極図形（ γ のフランク(Frank)図形）

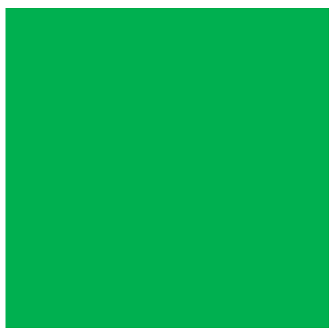
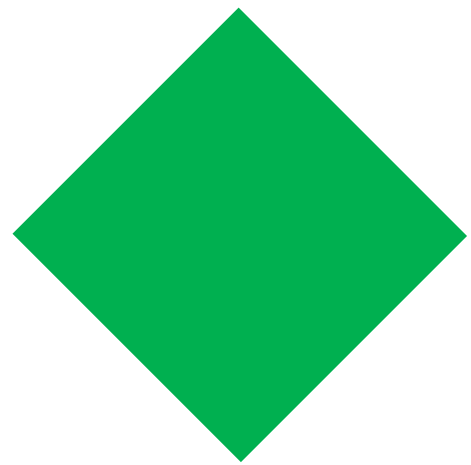
$$F_\gamma = \{\, \vec{z} \in \mathbf{R}^n \mid |\vec{z}| \leq 1/\gamma\,(\vec{z}/|\vec{z}|)\}$$

- ウルフ図形

$W_\gamma = \{\, \vec{x} \in \mathbf{R}^n |\, \vec{x} \cdot \vec{m} \leq \gamma(\vec{m})$ がすべての単位ベクトル $\vec{m}$ について成立$\}$

フランク図形とウルフ図形

共役の関係

F_γ	W_γ
	
正方形	その双対

ファセットの例

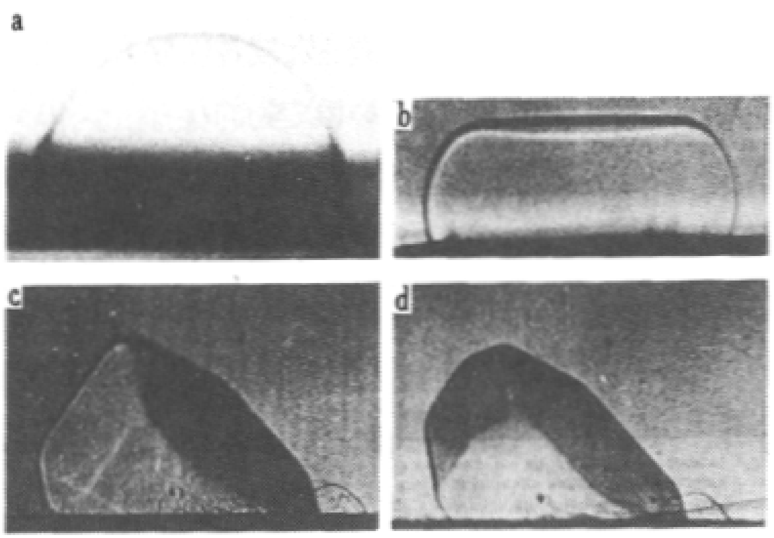


図 4.3.2 ^{4}He の結晶の形．温度はそれぞれ，(a) 1.3 K，(b) 1.08 K，(c) 0.4 K，(d) 0.35 K．(S. Balibar, F. Gallet, and R. Rolley : J. Cryst. Growth 99 (1990) 46 より)

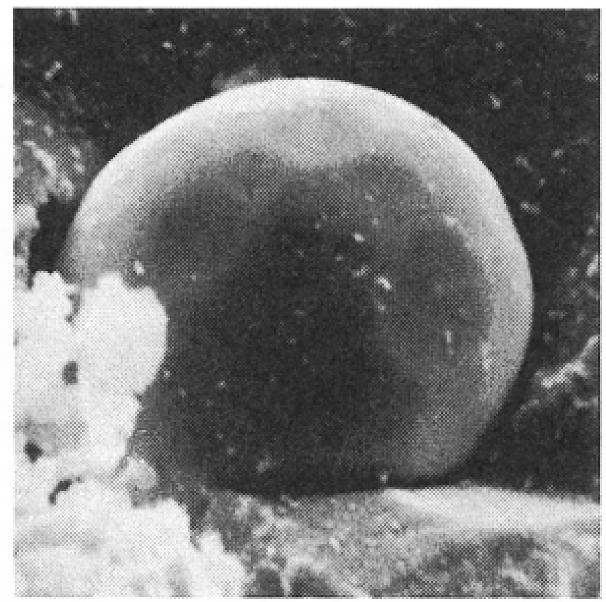


図 9.1.13 固体金属銀と共存状態でのセレン化銀 α-Ag_2Se の平衡形．{100}，{110} 面以外の高次の面が観察されている．

ヘリウム ^{4}He の絶対零度付近。低温になればなるほどファセットが多くなる。

セレン化銀: ファセットが多数出現。

「結晶成長ハンドブック」(1995)

クリスタライン曲率

異方的平均曲率 H_γ は表面エネルギーの微分。ウルフ図形では定数（ 0 でない）。したがってウルフ図形は球の役割を演じる。ファセットでは H_γ はゼロでない。どう定義するか。

全変動流方程式の例

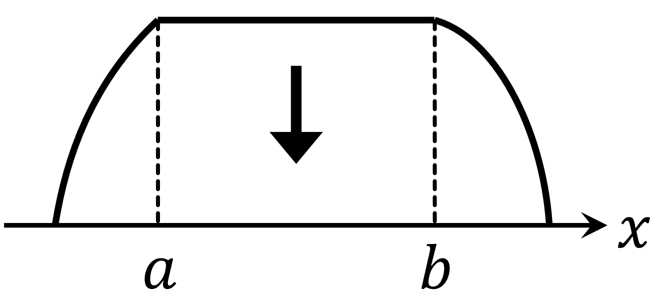
$$\dot{u} = \operatorname{div}\left(\frac{\operatorname{grad} u}{|\operatorname{grad} u|}\right)$$

１次元の場合

$$\dot{u} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{sgn}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right)$$

u の時刻 t でのグラフ: 平らな部分でのスピードは？

もし**一定**ならば



$$\dot{u} = -\frac{2}{b-a} = -(\text{チーガー（Cheeger）比}).$$

曲線のクリスタライン曲率流

F_γ は凸多角形とする。

特別な多角形の解のみに限定：J. Taylor (1991), S. Angenent – M. Gurtin (1981)

等高面法： M.-H. Giga（儀我美保）– YG, Arch. Rational Mech. Anal. (2001)

　粘性解をどう定義するか、比較定理をどう示すか。ファセットでのスピードは一定。

高次元の本質的問題

全変動流方程式で、ファセット上でスピード一定とすると、それはチーガー（Cheeger）比 $|\partial F|/|F|$ であるが、**必ずしも一定ではない**！　スピード一定のファセットは較正可能（Calibrable）と呼ばれている。

最近の成果

粘性解の概念を拡張することにより、一般のクリスタライン平均曲率流方程式（フランク図形が凸多面体）についても等高面法が拡張できる。

M.-H. Giga – YG – N. Požár, J. Pure Appl. Math. (2013)

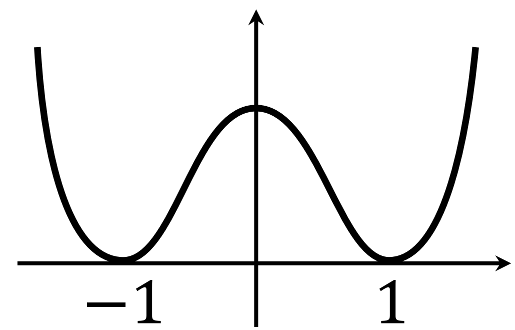
YG – N. Požár, Adv. Differential Equations (2016), Comm. Pure Appl. Math. (2018), SN Partial Differential Equations and Applications (2020)

A. Chambolle – M. Morini – M. Ponsiglione, Comm. Pure Appl. Math. (2017), A. Chambolle – M. Morini – M. Novaga – M. Ponsiglione, J. Amer. Math. Soc. (2019)

エネルギーの特異極限
表面エネルギー（表面積）の近似など

$$E^{\varepsilon}(u) = \frac{\varepsilon}{2}\int |\mathrm{grad}\, u|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\int W(u)\, dx$$ ファンデルワールスエネルギー

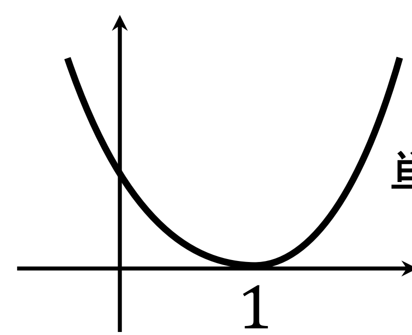
$$W(u) = (1 - |u|^2)^2$$



Allen−Cahn エネルギーともいう。

$\varepsilon \to 0$ の極限として $u = \pm 1$ の境目の曲面積

- Ginzburg-Landau エネルギー：u：ベクトル値
- Aviles-Giga エネルギー：$u = \mathrm{grad}\,\varphi$ が課されている。(1986) ...



単底型

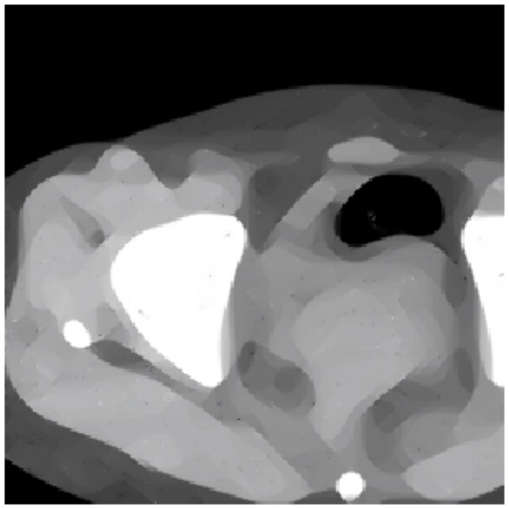
W が単底型の場合の極限は？：YG – J. Okamoto（岡本）– M. Uesaka（上坂）(2021出版予定)

感想

- 微分方程式で扱う場合は、初等幾何に出てくる図形（多角形など）のほうが難しい。
- ウルフ図形が解の滑らかさを代表している。例えば、ファセットのふちの近くで滑らかならば、より一般の図形も法ベクトルが連続となる。

（ S. Tsubouchi（坪内）(修士論文 2021), YG – S. Tsubouchi, 研究中）

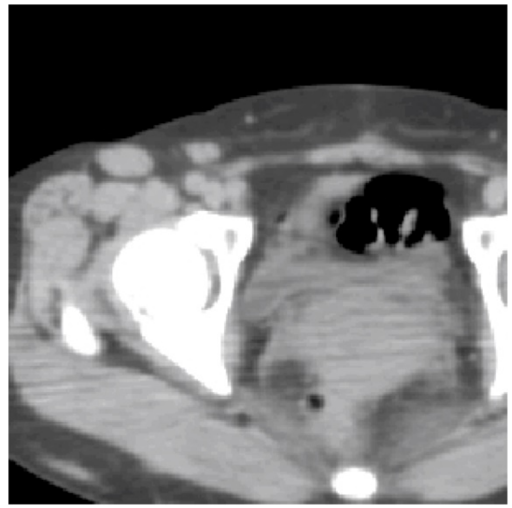
5. 画像処理、データサイエンス、結晶成長への応用



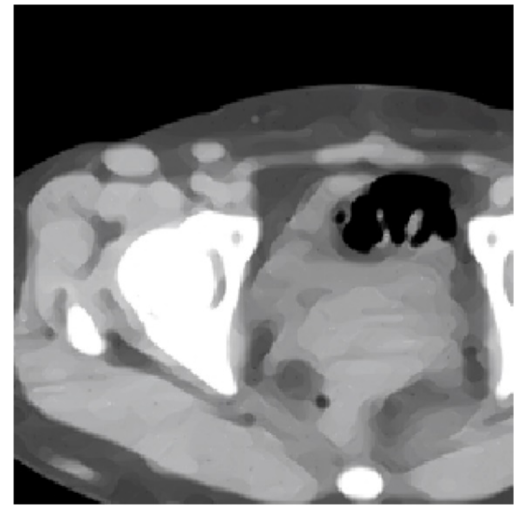
(B)
等高面平均曲率流方程式

$$u_t - |\nabla u|\,\mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = 0$$

による平滑化



(A)
元画像



(C)
全変動流方程式

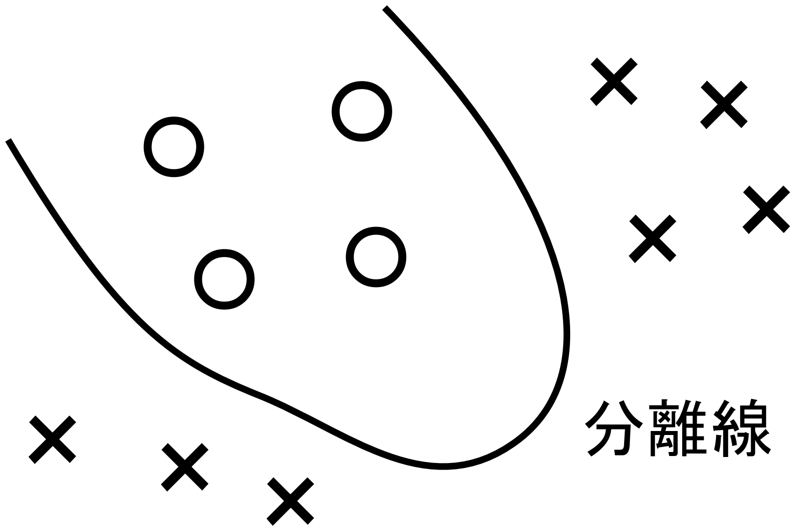
$$u_t - \mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = 0$$

による平滑化

（L. Rudin – S. Osher – E. Fatemi (1992) 参照）

医用画像のノイズ除去
（本谷 秀堅、名古屋工業大学）

データサイエンス

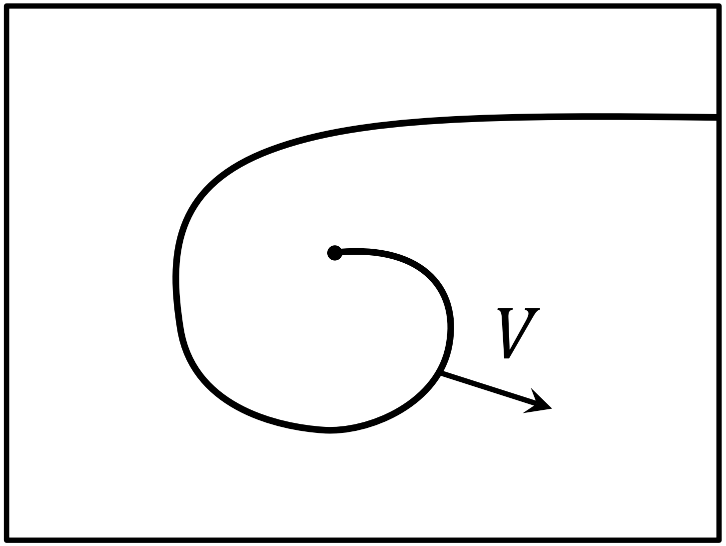


創薬への応用
熱方程式による
２値分離

筋委縮症に対する薬の候補の絞り込み（10年かかるところ３か月でできた）

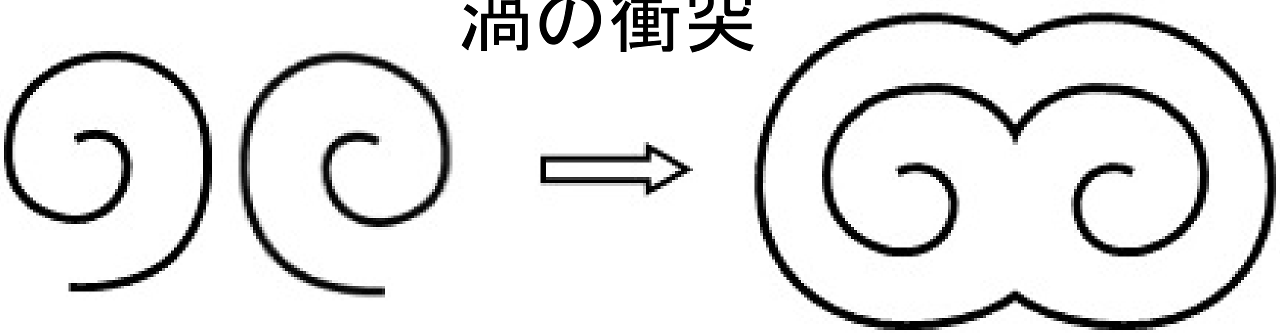
T. Hidaka（日高中, 武田薬品工業 ㈱）... YG – M.-H. Giga – H. Inoue（井上治久、京大iPS細胞研究所）, Patterns (2020)
M.-H. Giga – YG – T. Ohtsuka（大塚）– N. Umeda（梅田）(2013)

結晶表面の成長現象への応用

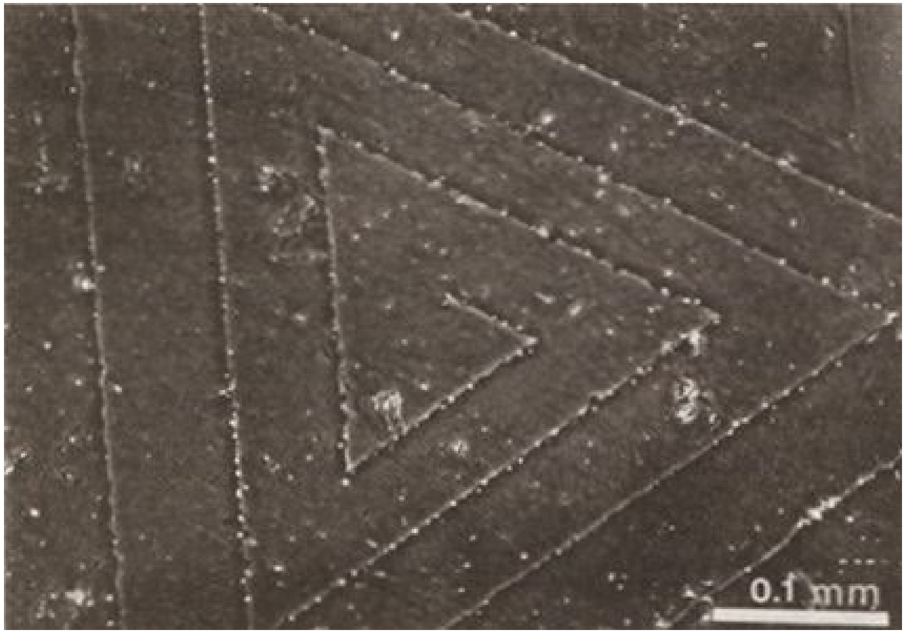


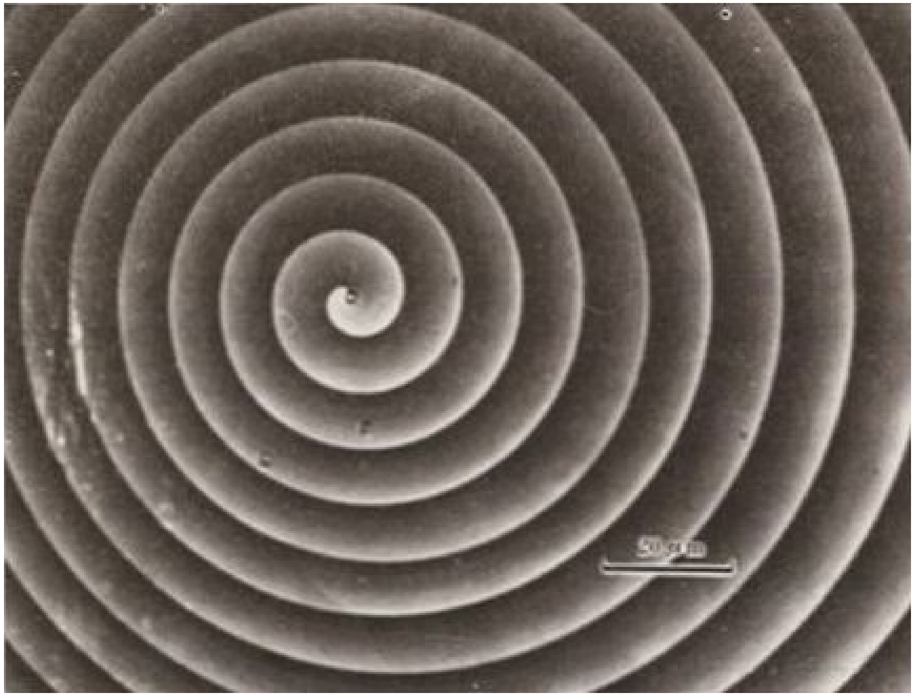
$$V = 1 + H$$

渦の衝突



結晶表面の渦巻成長の実際

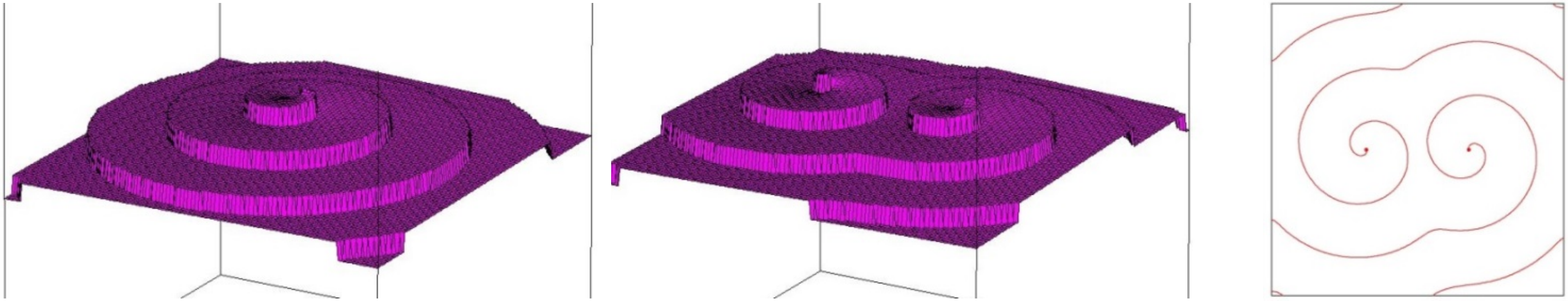




炭化珪素の渦巻成長層

砂川 一郎「小さな石にも、歴史と個性がある」東光印刷 (1998)

変形等高面法による渦巻成長の数値計算



T. Ohtsuka – YG – T. R. Tsai (2014)

異分野･産業と数学連携

　装置が古くなったら更新するように、
　使っている数学が古くなったら刷新しましょう。

　今まで数学を使っていない部分には、
　数学の導入を検討しましょう。

　数学研究者との協業には、コツがあります。
　数学研究者はゼロベースで物事を考えたくなるからです。

謝辞

共同研究者（内外数学研究者、諸科学分野研究者）、かつての学生、現在の学生、また支援員、支援団体（札幌国際プラザ、ニセコ町関係者）の皆様に感謝いたします。

（諸科学分野共同研究者：神部勉（東大理物理名誉教授）[渦の研究]、吉田善章（東大新領域）[プラズマ物理]、横山悦郎（学習院大学）[結晶成長]...）

ご清聴ありがとうございました。

スコア（2021年3月8日現在）

MathSciNet：被引用数 5,887

Google Scholar：被引用数 13,400、h指標 51（被引用数51以上の論文51編）、i10指標 160（被引用数10以上の論文160編）