傾理論とその仲間たち

2020／11／20

東京大学 談話会

§1 半単純環

問 与えられた環上の加群(の同型類)を分類せよ

例 ① K: 体　任意のK加群は基底をもつ

——— ≈ ——— 自由加群 ⊕K

② K: 体　$A = M_n(K) = \begin{bmatrix} K & \cdots & K \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K & \cdots & K \end{bmatrix}$ 全行列環

行ベクトル $V = [K \cdots K]$ は A加群

V は単純 A加群

任意の A加群は V の直和

——— ≈ ——— 半単純(単純加群の直和)

③ 一般に、Aが半単純環（＝A加群Aが半単純）

$\Longrightarrow$ 任意のA加群は半単純

森田理論　射影加群（:= 自由加群の直和因子）で

加群圏を統制する

圏 ＝ 対象と射からなる構造

環Aの加群圏　Mod A $\left\{\begin{array}{l}\text{対象は A加群} \\ \text{射は A加群の準同型}\end{array}\right.$

圏$\mathcal{C}$と$\mathcal{D}$が同値 ＝ 構造を保つ全単射

{$\mathcal{C}$の対象の同型類} ＝ {$\mathcal{D}$の対象の同型類}

$\{\mathcal{C}の射\} \simeq \{\mathcal{D}の射\}$ が存在する.

Morita's Theorem A, B: 環

$\mathrm{Mod}\,A$ と $\mathrm{Mod}\,B$ は同値

$\Longleftrightarrow$ $\exists P$: Aの射影生成元 s.t. $B \simeq \mathrm{End}_A(P)$

このとき A と B は森田同値という

例 A: 環, $P := A^{\oplus n}$ $(n \geq 1)$ は Aの射影生成元

A と $\mathrm{End}_A(P) = M_n(A)$ は森田同値

応用例 半単純環の Artin–Wedderburn 構造定理

§2 箙 (quiver)

単純加群により，加群の粗い分類がえられる

(Jördan-Hölder Theorem)

↓ 精密化

<u>定義</u> A加群 X が直既約 $\Longleftrightarrow$ $X \simeq Y \oplus Z$ ならば $Y = 0$ or $Z = 0$

<u>例</u> 単純加群 $\Longrightarrow$ 直既約

逆が成立するのは半単純環のときのみ

<u>Krull-Schmidt Theorem</u> 長さ有限の加群は，有限個の直既約加群の直和として一意的に表される

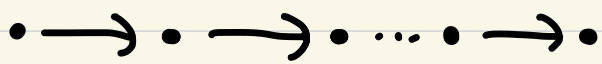
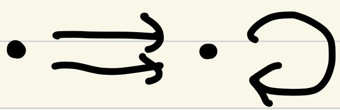
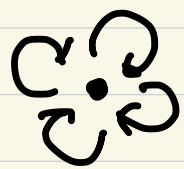
例 K:体　$A = T_n(K) = \begin{bmatrix} K & K & \cdots & K & K \\ 0 & K & \cdots & K & K \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K & K \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & K \end{bmatrix}$ 三角行列環

各行 $\underset{P_1}{\underset{\shortparallel}{[K K \cdots K K]}} \supset \underset{P_2}{\underset{\shortparallel}{[0 K \cdots K K]}} \supset \cdots \supset \underset{P_n}{\underset{\shortparallel}{[0 0 \cdots 0 K]}}$
はA加群

P_i / P_j $(1 \leq i < j \leq n)$ は直既約A加群の全て

$\therefore$ Aは有限表現型(=直既約加群の同型類が有限個)

定義 Q: 箙(quiver) = 点と矢からなる有向グラフ

KQ（道代数）

・K基底……Qの道（＝矢をつなげたもの）

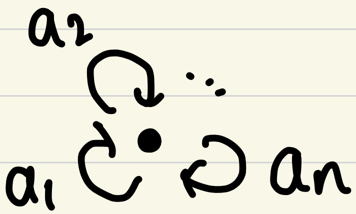
点＝長さ0の道．　矢＝長さ1の道

・積……2つの道の結合（つながらないときは0とする）

例 ① $1\xrightarrow{a_1}2\xrightarrow{a_2}\cdots\xrightarrow{a_{n-1}}n$　道は　$i\xrightarrow{a_i}i+1\xrightarrow{a_{i+1}}\cdots\xrightarrow{a_{j-1}}j$

$KQ = T_n(K)$　　$(1\le i\le j\le n)$

②



$KQ = K\langle x_1,\cdots,x_n\rangle$

（n変数非可換多項式環）

③ $\forall$有限生成K代数は，$\exists$KQの剰余環

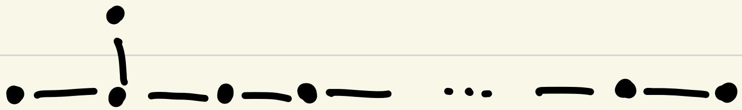
注 半単純環は大域次元0．道代数は大域次元1

Gabriel's Theorem (1972)　Q: 箙, K: 体

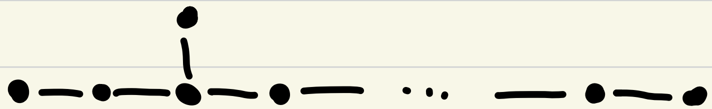
① KQ: 有限表現型 $\Longleftrightarrow$ Q: Dynkin 箙 (以下のグラフの辺を矢におきかえてえられるもの)

A_n $(n \geq 1)$

D_n $(n \geq 4)$



E_n $(n = 6, 7, 8)$



② ①のとき

{直既約 KQ 加群} $\xleftrightarrow{1-1}$ {Q の 正ルート}

ルート系の圏化: 団代数, 量子群への応用

定義 AR (Auslander-Reiten) 箙

点… 直既約 A加群の同型類

矢… 既約射 $f: X \to Y$ が存在するときに矢 $X \to Y$ を描く

(= 非自明な方法で2つの射の合成で表されない射)

例 $A = K[\bullet \to \bullet \to \bullet] = T_3(K)$

$$
\begin{tikzcd}
 & & {[KKK]} \arrow[dr] & & \\
 & {[0KK]} \arrow[ur] \arrow[dr] & & {[KK0]} \arrow[dr] & \\
{[00K]} \arrow[ur] & & {[0K0]} \arrow[ur] & & {[K00]}
\end{tikzcd}
$$

§3 傾理論

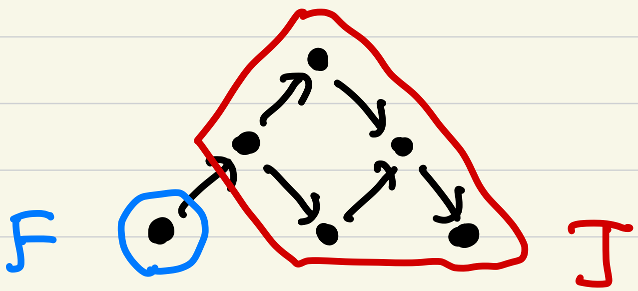
Q, Q' : 同じグラフから得られる箙

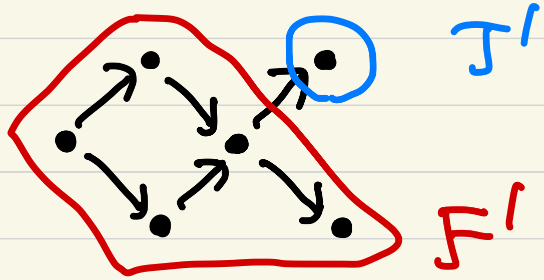
$\Longrightarrow$ Mod KQ と Mod KQ' は似ている

例 $A = K[\cdot \longrightarrow \cdot \longleftarrow \cdot] = \begin{bmatrix} K & K & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & K & K \end{bmatrix}$ の AR 箙

$$
\begin{tikzcd}
 & {[KK0]} \arrow[dr] & & {[00K]} \\
{[0K0]} \arrow[ur] \arrow[dr] & & {[KKK]} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & {[0KK]} \arrow[ur] & & {[K00]}
\end{tikzcd}
$$

$Q = [\bullet \to \bullet \to \bullet]$ $\qquad$ $Q' = [\bullet \to \bullet \leftarrow \bullet]$





(KQ', KQ) 加群 $T := \begin{bmatrix} K & K & K \\ 0 & K & K \\ 0 & K & 0 \end{bmatrix}$ が、部分圏の同値

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Hom}_{KQ}(T, -) : \mathcal{J} \simeq \mathcal{F}' \\ \mathrm{Ext}^1_{KQ}(T, -) : \mathcal{F} \simeq \mathcal{J}' \end{array}\right\}$$ を与える。

• 同様のことが、鏡映の関係にある箙 Q, Q' に対して成立

(シンクに入る矢を逆向きにする
ソースから出る ―――― 〃 ――――)

導来圏　$D(A)$

- 対象：　A加群の鎖複体　$X = \left[\cdots \to X^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} X^0 \xrightarrow{d^0} X^1 \to \cdots \right]$

  ($d^i : X^i \to X^{i+1}$ は Mod$A$ の射で $d^{i+1} \circ d^i = 0$ をみたす)

- 射：　鎖準同型

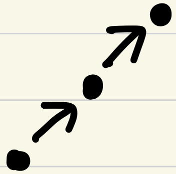
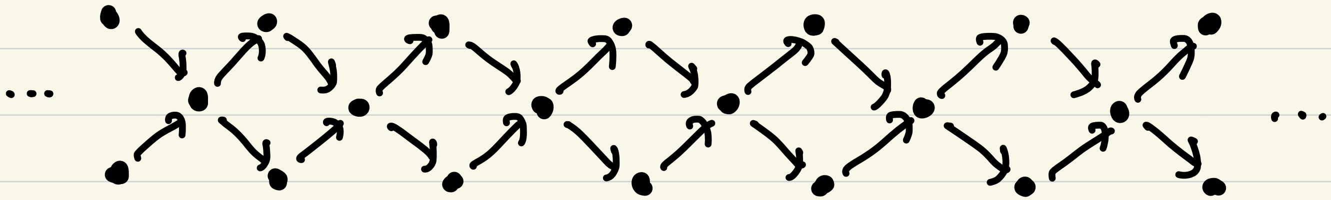
$$
\begin{array}{ccccccccc}
X & = & [\cdots & \to & X^0 & \xrightarrow{d^0} & X^1 & \to \cdots &] \\
{\scriptstyle f}\downarrow & & & & {\scriptstyle f^0}\downarrow & & {\scriptstyle f^1}\downarrow & & \\
Y & = & [\cdots & \to & Y^0 & \xrightarrow{e^0} & Y^1 & \to \cdots &]
\end{array}
$$

ただし擬同型 $(\forall i,\ H^i(f) : H^i(X) \simeq H^i(Y))$ の逆射をつけ加える

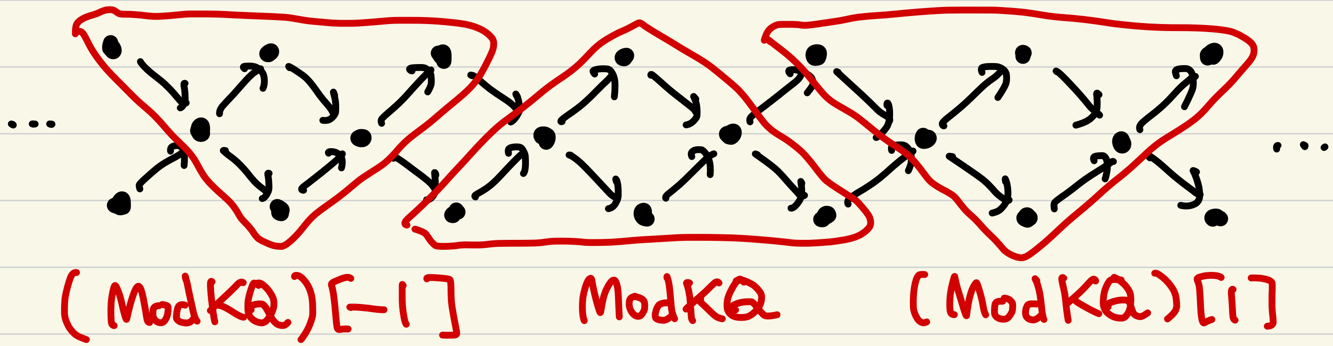
<u>Happel's Theorem</u> (1987)

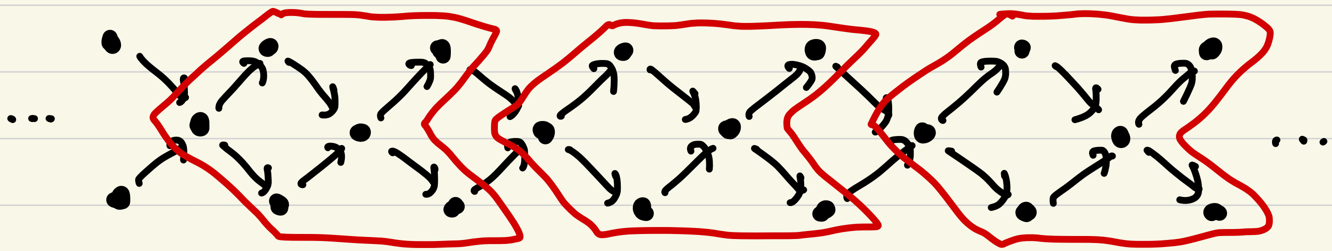
① Q と Q' が鏡映 $\Longrightarrow$ $D(KQ)$ と $D(KQ')$ は同値

② Q : Dynkin 箙 $\Rightarrow$ $D(kQ)$ の AR箙は $\mathbb{Z}Q$

Q  $\mathbb{Z}Q$ 

$D(A) \circlearrowleft [1]$ = (鎖複体を1つ左にずらす)





$D(A) \supset$ $\mathrm{per}\,A$ $:=$ (Aから生成されるものの全体) $= K^b(\mathrm{proj}\,A)$

<u>定義</u>　A : 環，　$\mathrm{per}A \ni T$: 傾複体 (tilting complex)

$\Longleftrightarrow$ ① $\mathrm{Hom}_{D(A)}(T, T[i]) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}$

② Tは $\mathrm{per}A$ の生成元

<u>例</u>　① A自身，　Aの射影生成元

② QとQ'が鏡映のときに現れた (KQ', KQ)加群 T

<u>Rickard's Theorem (1989)</u>　　A, B : 環

$D(A)$と$D(B)$は同値

$\Longleftrightarrow \exists\, T$: Aの傾複体 s.t. $B = \mathrm{End}_{D(A)}(T)$

§4 準傾理論

問 与えられた環 A と導来圏同値な環を分類せよ

$\Leftarrow$ Aの傾複体全体の構造を理解せよ

→ 少し拡げると良い

定義 [Keller-Vossieck 1987, Aihara-I 2012]

A: 環, $\mathrm{per}A \ni T$: 準傾複体 (silting complex)

$\Leftrightarrow$ ① $\mathrm{Hom}_{D(A)}(T, T[i]) = 0 \quad \forall i > 0$

② T は perA の生成元

$\mathrm{silt}A := \{ \text{A の準傾対象} \} / \sim$

$\left(T \sim U \Leftrightarrow \begin{array}{c} T \\ \cup \end{array} \text{は} \begin{array}{c} U^{\oplus} \\ T^{\oplus} \end{array} \text{の直和因子} \right)$

<u>例</u> ① A : 局所環 $\Longrightarrow$ $\mathrm{silt}A = \{ A[i] \mid i \in \mathbb{Z} \}$

② $A = K[\bullet \longrightarrow \bullet]$

$D(A)$ の AR 箙 $= \mathbb{Z}Q$ $\quad \cdots \; X_{-2} \nearrow X_{-1} \searrow X_0 \nearrow X_1 \searrow X_2 \nearrow X_3 \searrow \; \cdots$

$$\mathrm{silt}A = \{ X_i \oplus X_{i+1+3j} \mid i, j \in \mathbb{Z}.\ j \geq 0 \}$$

<u>定義</u> [AI12] $T, U \in \mathrm{silt}A$

$$T \geq U \iff \mathrm{Hom}_{D(A)}(T, U[i]) = 0 \quad \forall i > 0$$

これは $\mathrm{silt}A$ 上の半順序を定める.

Hasse 箙 $\quad$ 点: $\mathrm{silt}A$

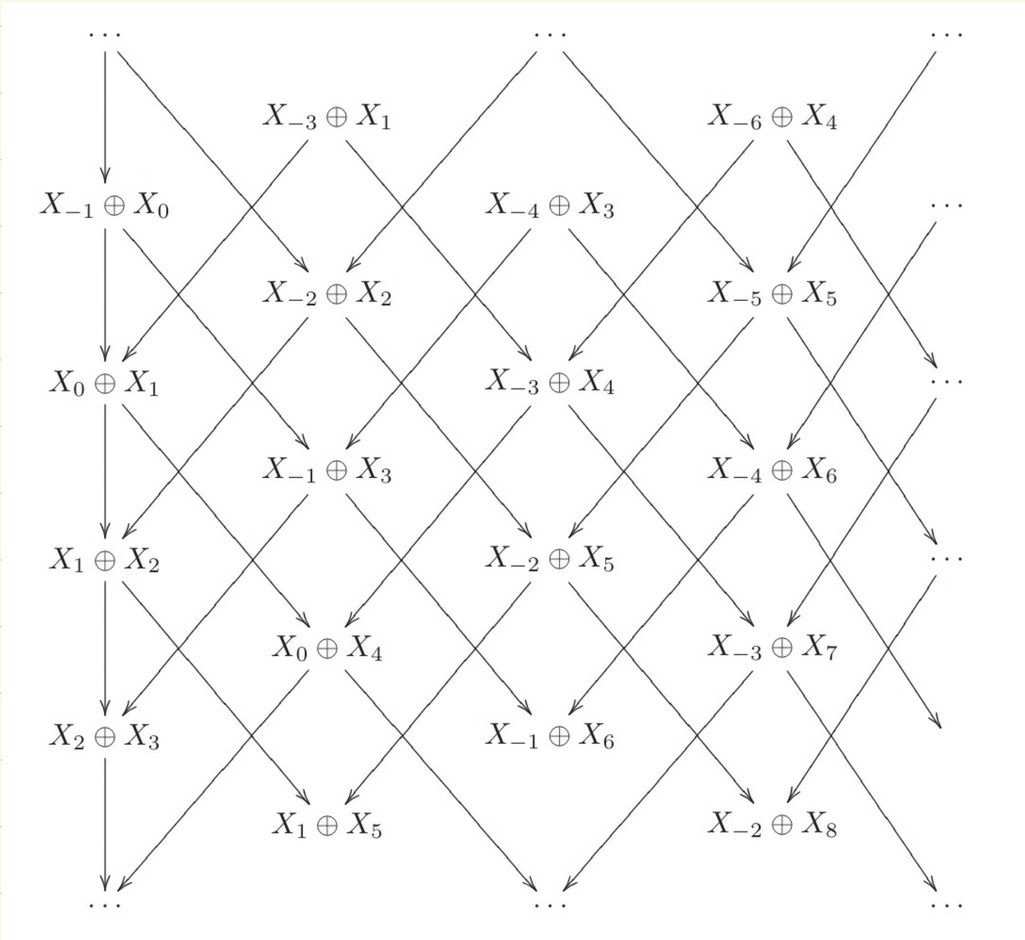
矢 $T \rightarrow U$ を描く $\iff$ $T > U,\ T > \overset{\nexists}{\underset{\mathrm{silt}A}{\underset{\cap}{V}}} > U$

例 ① A：局所環

$$\cdots \to A[-1] \to A \to A[1] \to \cdots$$

② $A = K[\bullet \to \bullet]$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & X_{-1} \arrow[dr] & & X_1 \arrow[dr] & & X_3 \arrow[dr] & \\ \cdots & X_{-2} \arrow[ur] & & X_0 \arrow[ur] & & X_2 \arrow[ur] & & \cdots \end{tikzcd}$$



定義（$\mathrm{per}A$ が Krull-Schmidt 圏のとき）

$T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_n \in \mathrm{silt}A$ （各 T_i は直既約で非同型）

$k = 1 \sim n$ に対し，射 $f : T_k \longrightarrow X$ で

① X は $(T/T_k)^{\oplus}$ の直和因子
② $\forall$ 射 $g : T_k \longrightarrow T/T_k$ は f を通過する
③ ①②をみたすものの中で f は極小

をとり，$\mu_k^-(T) := (T/T_k) \oplus (f$ の写像錐$)$

双対的に $\mu_k^+(T)$ を定める．これらを**変異**とよぶ．

$$\mu_k^+ \circ \mu_k^- = 1_{\mathrm{silt}A} = \mu_k^- \circ \mu_k^+$$

定理 [AI] ① $\mu_R^{\pm}(T) \in \operatorname{silt} A$

② Hasse 図で 矢 $T \to U$ がある

$\Longleftrightarrow$ T と U は 変異の関係にある

とくに $\exists n > 0$, $\forall T \in \operatorname{silt} A$,

T に T 度 n 本の矢が入り. T から T 度 n 本の矢が出る

例 ① 鏡映は変異

② 団代数の変異は Ginzburg differential graded algebra の変異

<u>定義</u> $T = [\cdots \to T^{-1} \to T^{0} \to T^{1} \to \cdots]$ $(T^i \in \mathrm{proj}\,A)$

が 2-term $\iff$ $T^i = 0 \ \forall i \neq 0, 1$

$$\text{2-silt}A := \{ T \in \mathrm{silt}A \mid \text{2-term} \}$$

<u>Theorem</u> [Adachi-I-Reiten, Demonet-I-Jasso, Derksen-Fei]

① $T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_n \in \text{2-silt}A$, $k = 1 \sim n$

$\mu_k^-(T)$ と $\mu_k^+(T)$ の丁度片方が 2-silt$A$ に入る

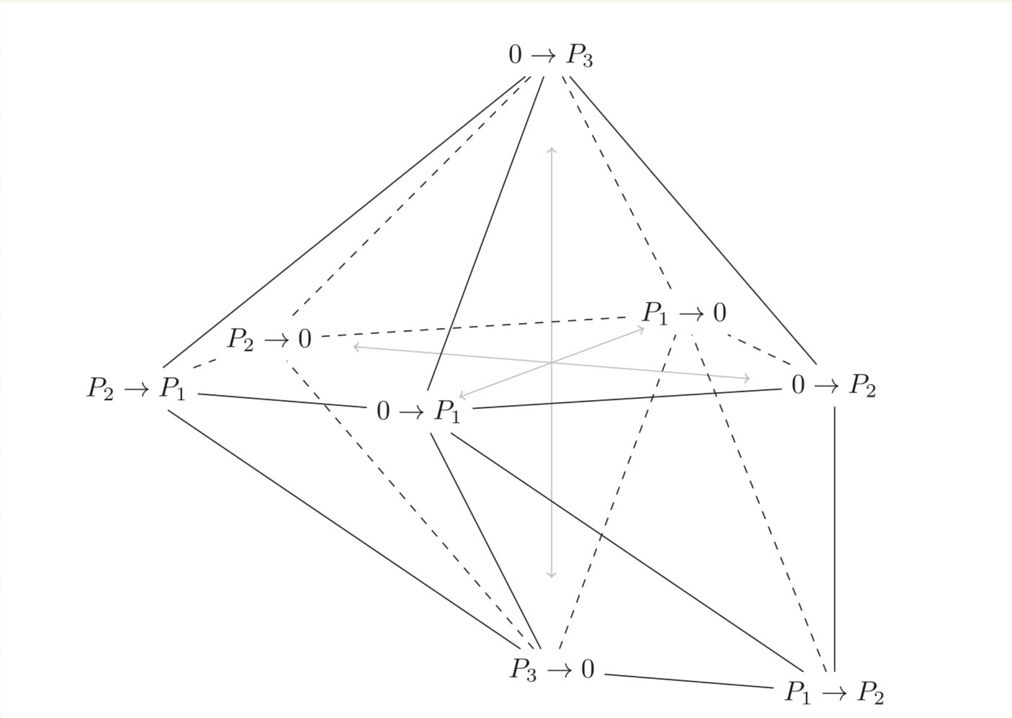
とくに T は丁度 n 本の矢の端点となっている

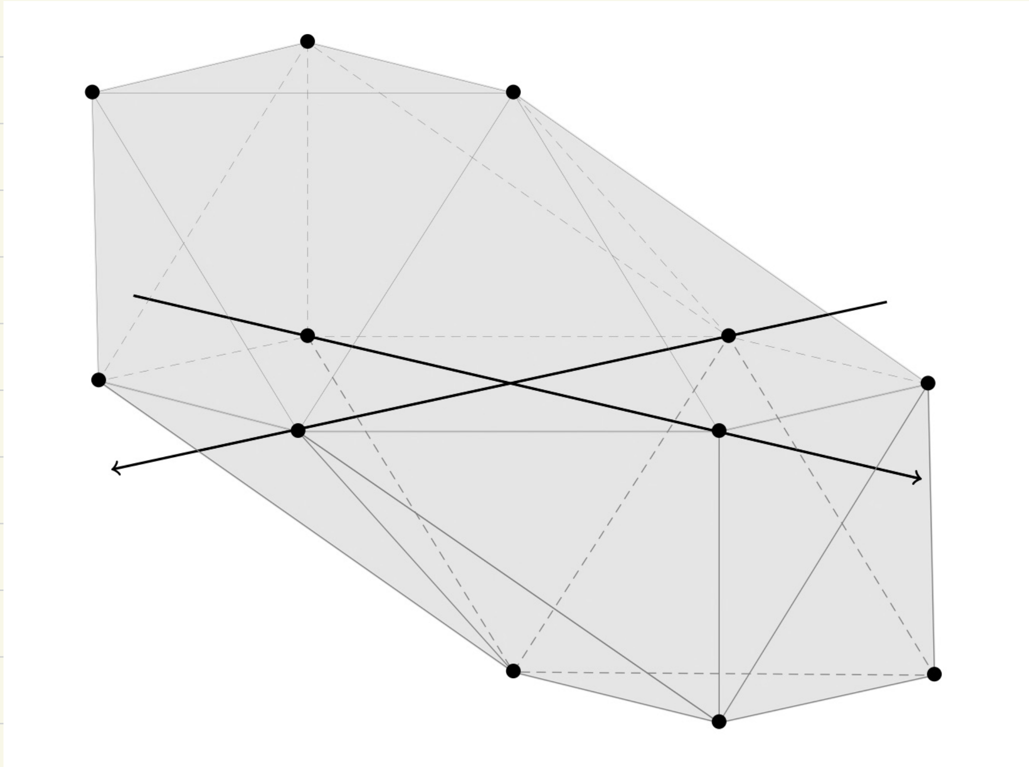
② 2-silt$A$ の全体は単体的複体 $\Delta(A)$ の構造を持ち.

$\forall$ 単体は $\exists$ $(n-1)$-単体の面である

$\forall$ $(n-2)$単体は丁度2つの$(n-1)$単体の面である

③ $\Delta(A)$の幾何的実現がAのGrothendieck群で与えられる





$K[\cdot \xrightarrow[a]{} \cdot \xrightarrow[b]{} \cdot] / (ab)$

Brauer tree alg