東京大学大学院数理科学研究科・談話会

特異点解消とマッカイ対応

伊藤 由佳理

名古屋大学大学院多元数理科学研究科・カブリ数物連携宇宙研究機構

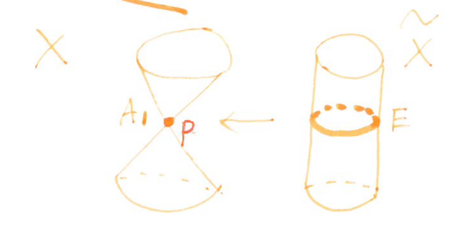
〜2017年11月24日〜

§0. 自己紹介

- 東大数理 M.D
  - 代数幾何学
  - 川又先生
- 学振 PD
  - 京大数理研
- 東京都立大学
  - 理学部
- 名古屋大学
  - 多元数理科学研究科
  - 2003.7.1〜
- 東京大学 カブリ数物連携宇宙研究機構
  - 2017.9.1〜
- 京都在住
  - 新幹線通勤

§1. 特異点解消

- 有限群 G ($\subset SL(n,\mathbb{C})$, $\subset GL(n,\mathbb{C})$)
- 商特異点 $\mathbb{C}^n/G =: X$
- 不変式環 $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]^G =: S$
  - $X = \mathrm{Spec}\, S$
- 例 $\langle \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix} \mid \varepsilon^n = 1 \rangle = G \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \subset SL(2,\mathbb{C})$
  - n次巡回群
  - $\mathbb{C}[x,y]^G = \mathbb{C}[x^n, y^n, xy]$
  - $\cong \mathbb{C}[x,y,z]/(xy - z^n)$: A_{n-1}型
- 特異点解消



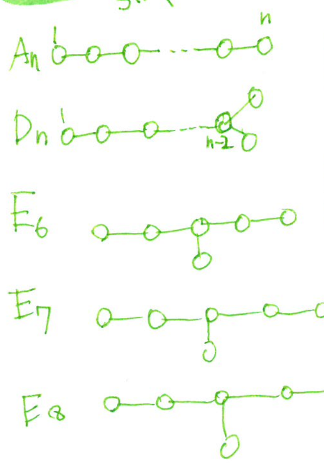
p: 特異点

E: 例外集合

$X - \{p\} \cong \tilde{X} - E$

§2. マッカイ対応

- プラトンの正多面体
- 二項正多面体
  - A_n, D_n, E_6, E_7, E_8
  - 群の分類 19c末
- $G \subset SU(2)$
- 特異点 $X = \mathbb{C}^2/G$
  - $X: f(x,y,z) = 0$ isolated, hypersurface sing.
  - クライン
  - $A_n: x^2 + y^2 + z^{n+1} = 0$ ($n \geq 1$)
  - $D_n: x^2 + yz^2 + z^{n-1} = 0$ ($n \geq 4$)
  - $E_6: x^2 + y^3 + z^4 = 0$
  - $E_7: x^2 + y^3 + yz^3 = 0$
  - $E_8: x^2 + y^3 + z^5 = 0$
- ディンキン図形 Simple Lie alg.



- Gの既約表現 $\{\rho_i\}$
  - 群の表現論
  - $\rho: G \to SL(2,\mathbb{C})$
  - $\rho \otimes \rho_i = \bigoplus a_{ij} \rho_j$
  - $2E - (a_{ij})$ Cartan matrix
  - $a_{ij} \neq 0$ ⓘ—ⓙ
  - $a_{ij} = 0$ ⓘ ⓙ
- 対応 1980年代
  - {特異点 $\mathbb{C}^2/G$ の極小特異点解消の例外集合 E_i}
  - $\updownarrow$ 1:1
  - {群 G の既約表現 ρ_i}
  - $G \subset GL(2,\mathbb{C})$ へ
- 極小特異点解消 代数幾何

$$f: \tilde{X} \to X$$
$$\cup \quad\quad \cup$$
$$E \to p$$
$$\cup E_i \quad (\forall E_i \cong \mathbb{P}^1)$$

E_i の dual graph.

§3. 超弦理論から

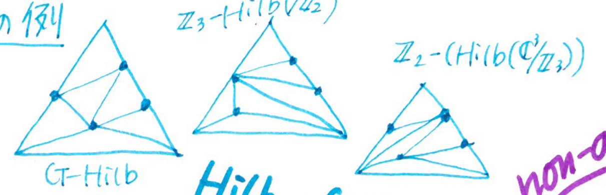
- 1985 Dixon-Harvey-Vafa-Witten
- Orbifold Euler characteristic
  - $\chi(M,G) = \frac{1}{|G|} \sum_{gh=hg} \chi(M^{\langle g,h \rangle})$
  - M: smooth cpx Kähler manifold
  - G: finite group, $g, h \in G$
  - (M/G: Calabi-Yau)
- Conjecture (Hirzebruch-Höfer) 1990
  - $G \subset SL(3,\mathbb{C})$ finite
  - $\exists$ crepant resolution
  - $f: \tilde{X} \to X = \mathbb{C}^3/G$
  - ($f^* K_X = K_{\tilde{X}} \cong \mathcal{O}_{\tilde{X}}$)
  - s.t. $\chi(\tilde{X}) = \#\{共役類\}$
  - True!
- Theorem (Markushevich, Roan, I³) 〜1997
- Theorem (Bridgeland-King-Reid)
  - X: G-Hilb($\mathbb{C}^3$) is a crepant resolution
  - $D(X) \cong D^G(\mathbb{C}^3)$
- Theorem (Kawamata)
  - $\forall G \subset SL(n,\mathbb{C})$: finite abelian,
  - $D(\tilde{X}) \cong D^G(\mathbb{C}^n)$
  - if $\exists$ crepant resolution of $\mathbb{C}^n/G$

§4. G-Hilbert scheme

- G-Hilb($\mathbb{C}^n$)
  - $\cong$ {I: G-invariant ideal $\subset \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ s.t. $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]/I \cong \mathbb{C}[G]$}
- Known results
  - $n=2$. $G \subset GL(2)$
    - $\Rightarrow$ G-Hilb($\mathbb{C}^2$) $\to \mathbb{C}^2/G$ the minimal resolution
    - (I-Nakamura, Kido, A.Ishii)
  - $n=3$. $G \subset SL(3)$
    - $\Rightarrow$ G-Hilb($\mathbb{C}^3$) $\to \mathbb{C}^3/G$ crepant resolution
    - (Nakamura, BKR)
- 言いかえ (モジュライ空間)
  - ※ G-Hilb($\mathbb{C}^n$) = moduli sp. of G-clusters Z
  - Z = G-inv. subscheme $\subset \mathbb{C}^n$ s.t. $H^0(\mathcal{O}_Z) \cong R_G$
  - ※ $\cong M_\theta(Q,R)$: moduli sp. of McKay quiver with relations
  - θ-generated
- Theorem (C-I) 2002
  - $G \subset SL(3,\mathbb{C})$ finite abelian
  - $\forall$ proj. crep. resol $\tilde{X}$
  - $\cong_{\text{isom}} M_\theta$
  - θ: some GIT stability parameter
- Conjecture (Craw-Ishii)
  - $\forall G \subset SL(3,\mathbb{C})$: finite
  - $\tilde{X} \cong_{\text{isom}} M_\theta$

§5 Iterated G-Hilb

- Theorem (Ishii-I-Nolla) 2011
  - $G \subset SL(3,\mathbb{C})$: finite
  - $G \rhd \exists N$ abelian normal subgroup
  - G/N-Hilb(N-Hilb) $\cong_{\text{isom}} M_\theta$
- Hilb of Hilb



§6 Problem

- non-abelian G
- $\exists$ crepant resol
- 物理へ?

※ IPMU 3/11(月) 談話会(森)

※ Nagoya <poster> 3/19-21 Kondo60